

Priv.-Doz.. Dr. Holger Cartarius, Universität Stuttgart

# Gruppentheoretische Methoden der Physik

Stuttgart, Wintersemester 2015 / 2016

Revision: 13. Juli 2016

Für Hinweise auf Druckfehler und Kommentare jeder Art bin ich dankbar.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Henri Menke, [henrimenke@gmail.com](mailto:henrimenke@gmail.com)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Bedeutung der Gruppentheorie in einfachen Beispielen</b>	1
1.1 Ein einfaches Beispiel (Drehung um eine Achse)	1
1.2 Verschiedene Darstellungen	2
1.3 Eine erste Konsequenz	3
1.4 Ein weiteres Beispiel	4
1.5 Fragen an diese Vorlesung	4
<b>2 Mathematische Grundlagen</b>	5
2.1 Gruppen	5
2.1.1 Axiome	5
2.1.2 Beispiele	5
2.1.3 Erste Folgerungen	6
2.1.4 Untergruppen	6
2.2 Morphismen	7
2.2.1 Gruppenhomomorphismus	7
2.2.2 Weitere Definitionen	8
2.2.3 Beispiele	8
2.2.4 Verallgemeinerung	9
2.3 Die Symmetrie in der Gruppentheorie	9
2.3.1 Gruppenwirkung	9
2.3.2 Symmetrie und Symmetriegruppe	10
2.3.3 Gruppendarstellung	10
2.4 Nebenklassen	10
2.5 Orbits und Bahnen	13
2.5.1 Einführung	13
2.5.2 Linkstranslation	13
2.6 Normalteiler	14
2.7 Konjugationsklassen	15
2.7.1 Konjugation eines Elements	15
2.7.2 Das Klassenprodukt	17
2.8 Neue Gruppen aus alten	17
2.8.1 Direktes Produkt	17
2.8.2 Verallgemeinerung	18
2.8.3 Semidirekte Gruppen	18
2.8.4 Beispiel	20
<b>3 Beispiele für Gruppen und deren Anwendungen</b>	21
3.1 Zur Drehgruppe $O(3)$	21
3.1.1 Zur Drehgruppe $SO(3)$	22
3.1.2 Die Gruppe $SU(2)$ und ihr Bezug zu $SO(3)$	23

3.1.3	Eine physikalische Konsequenz	25
3.1.4	Mit Spiegelungen: $O(3)$	26
3.2	Symmetrien im affinen Raum: $E(3)$	27
3.2.1	Der affine Raum	27
3.2.2	Einige Elemente (Symmetrieroberungen) aus $E(3)$	28
3.2.3	Anmerkungen	30
3.3	Diskrete Symmetrien im $\mathbb{R}^3$	31
3.3.1	Die Punktgruppen	31
3.3.2	Eigentliche und uneigentliche Punktgruppen	32
3.3.3	Die Doppelgruppen	33
<b>4</b>	<b>Darstellungen</b>	35
4.1	Lineare und Matrixdarstellung	35
4.1.1	Darstellung	35
4.1.2	Matrixdarstellung	36
4.1.3	Äquivalenz von Darstellungen	36
4.1.4	Unitäre Repräsentation	37
4.1.5	Neue Darstellungen aus alten	37
4.2	Reducible und irreduzible Darstellungen	38
4.2.1	Invariante Unterräume	38
4.2.2	Unitäre invariante Unterräume	39
4.3	Bedeutende mathematische Grundlagen	39
4.3.1	Schur-Lemmaten	40
4.3.2	Orthogonalitätsrelationen	40
4.3.3	Satz von Burnside	41
4.4	Charaktere	41
4.4.1	Definition	42
4.4.2	Folgerungen	42
4.4.3	Orthogonalitätsrelationen	43
4.4.4	Charaktere und Klassen	43
4.4.5	Die reguläre Rechtsdarstellung	44
4.4.6	Beispiel: Zyklische Gruppen	45
4.5	Reelle Darstellungen	46
4.6	Produkt von Darstellungen und Clebsch-Gordan-Reihe	47
4.6.1	Produktdarstellungen	47
4.6.2	Clebsch-Gordan-Reihe	48
4.7	Methode der Projektionsoperatoren	49
4.7.1	Projektionsoperatoren	49
4.7.2	Projektionen und Darstellungen	49
4.7.3	Erzeugung einer symmetriearbeiteten Basis	50
4.8	Symmetrische und antisymmetrische Darstellungen	51
4.8.1	Äußeres Produkt von Darstellungen	51
4.8.2	Anwendung auf die Symmetrisierung von Darstellungen	51

<b>5 Anwendungen von Gruppen und deren Darstellungen in der Physik</b>	53
5.1 Entartungen in Spektren	53
5.1.1 Die Symmetrie eines Hamiltonoperators	53
5.1.2 Invariante Unterräume und Entartung	53
5.1.3 Standardbeispiel: Teilchen im Zentralpotential	54
5.1.4 Weiteres Beispiel (Teilchen im Kristallfeld)	56
5.2 Symmetriereduktion des Eigenwertproblems	57
5.2.1 Lösen durch Diagonalisieren einer Matrixdarstellung	57
5.2.2 Störungsrechnung	60
5.3 Übergangsmatrixelemente und Auswahlregeln	60
5.3.1 Tensoroperatoren	61
5.3.2 Beispiele	61
5.3.3 Operatorprodukte	63
5.3.4 Wigner-Eckart-Theorem	64
5.3.5 Anmerkungen	65
<b>6 Liegruppen</b>	67
6.1 Was sind Liegruppen?	67
6.1.1 Vergleich mit diskreten Gruppen	67
6.1.2 Algebraische topologische und differenzierbare Eigenschaften	68
6.2 Liegruppe und Liealgebra	69
6.2.1 Liealgebra einer Matrixgruppe	70
6.2.2 Linkstransport eines Tangentialvektors	70
6.2.3 Kommutator und Liealgebra	71
6.2.4 Der umgekehrte Weg: Von der Liealgebra zur Liegruppe	72
6.3 Die Liegruppen $SU(1)$	73
6.3.1 Cartan-Weyl-Basis der Liealgebra $SU(n)$	73
6.3.2 Beispiele	75
6.3.3 Eigenzustände und Wurzelsystem	76
6.3.4 Leiteroperatoren und Wurzelvektoren	77
6.3.5 $SU(2)$	78
6.3.6 $SU(3)$	79
<b>7 Anwendungen der Liegruppen</b>	83
7.1 $SU(3)$ -Klassifikation von Quarks, Mesonen und Baryonen	83
7.1.1 Vorbemerkungen	83
7.1.2 Quarkmodell	84
7.1.3 Mesonen	86
7.2 Nichttabelsche Eichtheorien	87
7.2.1 Vorbemerkung: $U(1)$ -Eichtheorie des Elektromagnetismus	88
7.2.2 Erweiterung zu einer nichttabelschen Yang-Mills-Eichtheorie	90
7.2.3 Spontane Symmetriebrechung und Englert-Brout-Higgs-Mechanismus	92
7.2.4 Die elektroschwache Wechselwirkung für Leptonen	96
7.2.5 Starke Wechselwirkung	99
7.2.6 Zusammenfassung zum Standardmodell	100

7.2.7 Und darüber hinaus? 100

# 1

## Bedeutung der Gruppentheorie in einfachen Beispielen

### 1.1 Ein einfaches Beispiel (Drehung um eine Achse)

Wir betrachten einen dreidimensionalen euklidischen Vektorraum, gekennzeichnet mittels  $V^3$  mit einer Orthonormalbasis, gegeben durch  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ . In diesem Raum betrachten wir nun eine Drehung um eine Achse  $\hat{\mathbf{n}}$ .

Diese Drehungen bilden eine *Gruppe*

$$SO(2) = \{g(\varphi), 0 \leq \varphi < 2\pi\} \quad (1.1)$$

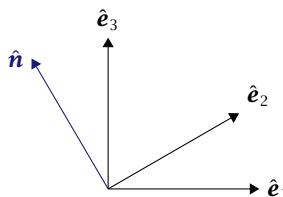
wobei  $g(\varphi)$  erst einmal abstrakte Gruppenelemente sind, deren Wirkung auf die Basisvektoren lautet

$$\hat{\mathbf{e}}'_i = g(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_j D_{ji}(g(\varphi)) . \quad (1.2)$$

Die transformierten Basisvektoren wurde hier in der ursprünglichen Basis entwickelt.

Betrachten wir nun die Wirkung auf einen Vektor  $\mathbf{v} \in V^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^3 v_i \hat{\mathbf{e}}_i \\ \mathbf{v}' &= g(\varphi)\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i g(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_i \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_j \sum_{i=1}^3 D_{ji}(g(\varphi)) v_i \end{aligned} \quad (1.3a)$$



► 1 Der dreidimensionale euklidische Vektorraum wird aufgespannt durch drei orthogonale Basisvektoren, die auch als  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse bezeichnet werden. Eine Drehachse wird durch eine beliebige Superposition dieser Basisvektoren beschrieben.

also

$$v'_j = \sum_{i=1}^3 D_{ji}(g(\varphi)) v_i \quad (1.3b)$$

oder mit  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$  folgt

$$\mathbf{v}' = \mathbf{D}(g(\varphi))\mathbf{v} \quad (1.3c)$$

mit der Matrixgruppe

$$M = \{\mathbf{D}(g(\varphi)) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi\} . \quad (1.4)$$

Diese ist *isomorph* zu  $\text{SO}(2)$  und ist außerdem eine konkrete *Darstellung* der abstrakten Gruppe  $\text{SO}(2)$ . Diese hängt offensichtlich von der Basis  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$  ab. Die Frage ist, ob es besonders einfache Darstellungen gibt.

## 1.2 Verschiedene Darstellungen

Wählen wir

$$\hat{\mathbf{e}}_3 \parallel \hat{\mathbf{n}} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2 \perp \hat{\mathbf{n}} ,$$

dann zerfällt  $V^3$  in eine direkte Summe

$$V^3 = V^1 \oplus V^2 \quad (1.5a)$$

$$V^1 = \langle \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle \quad (1.5b)$$

$$V^2 = \langle \hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2 \rangle . \quad (1.5c)$$

Dabei sind  $V^1$  und  $V^2$  *invariante Unterräume*.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in V^1 &\rightarrow g(\varphi)\mathbf{v} \in V^1 \text{ für alle } \varphi , \\ \mathbf{w} \in V^2 &\rightarrow g(\varphi)\mathbf{w} \in V^2 \text{ für alle } \varphi , \end{aligned}$$

oder

$$\text{SO}(2)V^1 \subset V^1 ,$$

$$\text{SO}(2)V^2 \subset V^2 .$$

In dieser Basis haben die Darstellungsmatrizen die Form

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (1.6)$$

Wie man sieht haben sie Blockdiagonalform, d.h.  $\mathbf{D}$  wurde reduziert auf eine  $1 \times 1$ - und eine  $2 \times 2$ -Darstellung. Für einen reellen Vektorraum ist diese Darstellung irreduzibel, d.h. eine weitere Zerlegung ist nicht möglich.

Betrachte nun Basisvektoren in einer komplexen Erweiterung

$$\hat{\mathbf{e}}_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{e}}_1 - i\hat{\mathbf{e}}_2) \quad (1.7a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_0 = \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (1.7b)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{e}}_1 + i\hat{\mathbf{e}}_2) \quad (1.7c)$$

Hier folgt

$$\begin{aligned} g(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_{+1} &\stackrel{(1.6)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \varphi + i \sin \varphi \\ \cos \varphi - i \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \varphi + i \sin \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= e^{i\varphi} \hat{\mathbf{e}}_{+1} \end{aligned} \quad (1.8a)$$

oder für alle Vektoren

$$g(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_m = e^{im\varphi} \hat{\mathbf{e}}_m. \quad (1.8b)$$

Man sieht also, dass sich die Darstellung im Komplexen weiter reduzieren lässt auf drei  $1 \times 1$ -Darstellungen.

$$D(g(\varphi)) \stackrel{(1.8b)}{=} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & & \\ & 1 & \\ & & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

### 1.3 Eine erste Konsequenz

Betrachte einen axialsymmetrischen hermiteschen Operator  $H$  im komplexen  $V^3$ , d.h.

$$H = D^\dagger(g(\varphi))HD(g(\varphi)) \quad , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (1.10)$$

und ein unitäres Produkt

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \mathbf{v}_1^\dagger \mathbf{v}_2 = \sum_{i=1}^3 v_{1,i}^\dagger v_{2,i}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \langle \hat{e}_m | H | e_n \rangle &\stackrel{(1.10)}{=} \langle \hat{e}_m | D^\dagger HD | \hat{e}_n \rangle \\ &= \langle D\hat{e}_m | H | D\hat{e}_n \rangle \\ &= e^{i(n-m)\varphi} \langle \hat{e}_m | H | \hat{e}_n \rangle. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Die einzige mögliche Lösung für  $n \neq m$  ist

$$\langle \hat{e}_m | H | \hat{e}_n \rangle \stackrel{(1.11)}{=} 0. \quad (1.12)$$

Symmetriangepasste Basen erzeugen Hamiltonmatrizen in Blochform, d.h. *invariante Unterräume* zwischen denen Matrixelemente verschwinden.

## 1.4 Ein weiteres Beispiel

Sei

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r})$$

ein  $\text{SO}(3)$ -invarianter Operator. Dann können die Eigenfunktionen geschrieben werden als

$$\psi_{n\ell m}(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi) = R_{n\ell}(\mathbf{r}) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \quad (1.13)$$

mit Eigenwerten  $E_{n\ell}$ . Sie spannen einen  $(2\ell + 1)$ -dimensionalen Entartungsraum  $V^{(\ell)}$  auf, welcher Eigenraum zu  $H$  ist. Mit

$$g \in \text{SO}(3): g\mathbf{r} = \mathbf{R}(g)\mathbf{r} \quad (1.14)$$

bedeutet eine Drehung des Zustandes

$$g\psi_{n\ell m}(\mathbf{r}) = \psi_{n\ell m}(\mathbf{R}^{-1}(g)\mathbf{r}) = \sum_{m'=\ell}^{\ell} \psi_{n\ell m'}(\mathbf{r}) D_{m'm}^{(\ell)}$$

wobei  $\mathbf{D}^{(\ell)}$  nun eine  $(2\ell + 1)$ -dimensionale irreduzible Darstellung von  $\text{SO}(3)$  ist. Es handelt sich dabei um eine symmetriegerichtete Entartung.

## 1.5 Fragen an diese Vorlesung

Wir kann man die symmetriegerichteten Entartungen verstehen? Wie kann man diese mathematisch fassen?

Welche Informationen benötige ich, um von einer Symmetrie sprechen zu können?

Welche Beziehungen gibt es zwischen den Gruppen? Was folgt physikalisch daraus?

Wie kann ich Gruppentheorie nutzen, um mir Probleme zu vereinfachen?

Welche Aussagen sind sofort möglich, wenn ich eine Symmetriegruppe kenne?

# 2

## Mathematische Grundlagen

### 2.1 Gruppen

#### 2.1.1 Axiome

2.1 **Defintion** Eine Gruppe ist ein Paar  $(G, \cdot)$  bestehend aus einer Menge  $G$  und einer Abbildung

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\rightarrow g \cdot h \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle  $g, h, k \in G$  gilt  $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$  (Assoziativgesetz).
2. Es gibt ein Element  $e \in G$ , sodass für alle  $g \in G$  gilt  $e \cdot g = g$  (Linkseinselement).
3. Zu jedem  $g \in G$  existiert ein  $g' \in G$  mit der Eigenschaft  $g' \cdot g = e$  (Linksinverses  $g' = g^{-1}$ ). ✖

2.2 **Defintion** Eine Gruppe  $G$  heißt abelsch oder kommutativ, wenn für alle  $g, h \in G$  gilt

$$g \cdot h = h \cdot g$$
✖

#### 2.1.2 Beispiele

1. „Generalized-Linear“-Gruppen  $GL(n)$ , Orthogonale Gruppen  $O(n)$ , Spezielle orthogonale Gruppen  $SO(n)$ , Spzielle unitäre Gruppen  $SU(n)$ , Unitäre Gruppen  $U(n)$ .
2.  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ , etc. Beachte, dass diese Gruppen viele zusätzliche Eigenschaften haben, die nicht alle Gruppen haben.
3.  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ , etc.
4. Die Menge bijektiver Abbildungen

$$f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} \xrightarrow{g} \mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{M}$$

$\underbrace{\quad}_{f \circ g}$

5. Permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \end{pmatrix}$$

## 6. Abstrakt: Verknüpfung über Gruppentafeln

.	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	$e$

Die Tafel der einfachsten nichttrivialen Gruppe sieht wie folgt aus

.	$e$	$g$
$e$	$e$	$g$
$g$	$g$	$e$

## 2.1.3 Erste Folgerungen

Die folgenden Eigenschaften lassen sich aus der Definition 2.1 folgern.

- ▶ Das Linksinverse ist äquivalent zum Rechtsinversen.
- ▶ Das Linkseinselement ist äquivalent zum Rechtseinselement.
- ▶ Zu  $g, h \in \mathcal{G}$  existiert genau ein  $x \in \mathcal{G}$  mit  $g \cdot x = h$  und genau ein  $y \in \mathcal{G}$  mit  $y \cdot g = h$ .
- ▶ Kürzungsregel:  $ax = ay \Rightarrow x = y$  und  $ua = va \Rightarrow u = v$ .
- ▶  $\forall a, b \in \mathcal{G}, (a^{-1})^{-1} = a, (a \cdot b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

## 2.1.4 Untergruppen

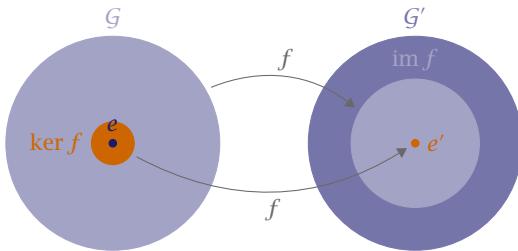
2.3 **Defintion** Eine **Untergruppe**  $\mathcal{H}$  von  $\mathcal{G}$ , geschrieben als  $\mathcal{H} < \mathcal{G}$ , ist eine nichtleere Teilmenge  $\mathcal{H}$  von  $\mathcal{G}$ , die bezüglich des Gruppenprodukts abgeschlossen ist. Dabei muss gelten  $e \in \mathcal{H}$  und wenn  $h \in \mathcal{H}$ , dann muss auch  $h^{-1} \in \mathcal{H}$  sein. ✖

2.1 **Theorem** Das **Untergruppenkriterium**. Eine nichtleere Teilmenge  $\mathcal{H}$  ist Untergruppe von  $\mathcal{G}$ , genau dann, wenn

$$g, h \in \mathcal{H} \Rightarrow g \cdot h^{-1} \in \mathcal{H}$$

für alle  $g, h \in \mathcal{H}$ . Die Bezeichnung ist  $\mathcal{H} < \mathcal{G}$ . ✖

- ▶ **Beispiel**
1. Die beiden trivialen (oder auch uneigentlichen) Untergruppen  $(\{e\}, \cdot) < \mathcal{G}$  und  $\mathcal{G} < \mathcal{G}$ . Alle anderen heißen „echt“ oder „eigentlich“.
  2.  $(\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{Q}, +) < (\mathbb{R}, +) < (\mathbb{C}, +)$ .
  3.  $SU(n) < U(n) < \text{GL}(n)$ .
  4.  $\text{SO}(2) < \text{SO}(3)$ . ◀



► 2 Zu Definition 2.5.

## 2.2 Morphismen

Morphismen sind Abbildungen zwischen Mengen gleichen Struktur, welche die Struktur bewahren. Wir betrachten das hier an der Struktur der Gruppe.

### 2.2.1 Gruppenhomomorphismus

#### 2.2.1.1 Definitionen

2.4 **Defintion** Seien  $(G, \cdot)$  und  $(G', \circ)$  Gruppen. Eine Abbildung

$$f: G \rightarrow G'$$

heißt **Homomorphismus**, wenn für alle  $g_1, g_2 \in G$  gilt

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \circ f(g_2) .$$

Schreibweise bei abelschen Gruppen:

$$f(g_1 + g_2) = f(g_1) + f(g_2) .$$

✗

2.5 **Defintion** (**Kern** und **Bild** eines Homomorphismus). Der Kern eines Homomorphismus ist das Urbild des neutralen Elements  $e' \in G'$

$$\ker f = \{g \in G \mid f(g) = e'\} = f^{-1}(e') .$$

Das Bild von  $f$  besteht aus den Elementen von  $G'$ , die ein Urbild in  $G$  haben

$$\text{im } f = f(G) = \{f(g) \mid g \in G\} .$$

✗

### 2.2.1.2 Folgerungen (o.B.)

- ▶  $f(e) = e'$ , d.h.  $e \in \ker f$
- ▶  $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1} \forall g \in G$
- ▶  $\ker f < G$
- ▶  $\text{im } f < G'$
- ▶ Seien  $r: G \rightarrow G'$  und  $s: G' \rightarrow G''$  Homomorphismen, dann ist auch ihre Verkettung  $s \circ r: G \rightarrow G''$  ein Homomorphismus. 
$$G \xrightarrow{r} G' \xrightarrow{s} G''$$
 
$$s \circ r$$
- ▶  $G \rightarrow G'$  injektiv  $\Leftrightarrow \ker f = \{e\}$

### 2.2.2 Weitere Definitionen

2.6 **Defintion** Ein Homomorphismus  $f: G \rightarrow G'$  heißt

- ▶ **Epimorphismus**, wenn  $f$  surjektiv ist,
- ▶ **Monomorphismus**, wenn  $f$  injektiv ist,
- ▶ **Isomorphismus**, wenn  $f$  bijektiv ist.

Weitere Bezeichnungen:

- ▶ Ein Homomorphismus  $f: G \rightarrow G$  heißt **Endomorphismus**.
- ▶ Ein Isomorphismus  $f: G \rightarrow G$  heißt **Automorphismus**.

Sind zwei Gruppen isomorph (es existiert ein Isomorphismus  $G \rightarrow G'$ ), so schreibt man

$$G \simeq G' .$$

✖

### 2.2.3 Beispiele

- ▶  $\mathbb{Z}_2$  ist die Gruppe mit den ganzen Zahlen 0 und 1 mit der Addition modulo 2 als Verknüpfung. Die Gruppe  $G = (\{1, -1\}, \cdot)$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}_2$  mit dem Isomorphismus

$$\begin{aligned} f: G &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ 1 &\mapsto 0 \\ -1 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

- ▶ Die reellen Zahlen lassen sich mit der Exponentialfunktion auf die positiven reellen Zahlen abbilden.

$$\begin{aligned} f: (\mathbb{R}, +) &\rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot) \\ x &\mapsto e^x \\ x + y &\mapsto e^{x+y} = e^x \cdot e^y \end{aligned}$$

## 2.2.4 Verallgemeinerung

Wir betrachten Morphismen allgemein, daher:

2.7 **Definition** Seien  $M$  und  $M'$  mathematische Objekte mit derselben mathematischen Struktur, z.B. eine Menge, Gruppe, Körper, Vektorraum, affiner Raum, topologischer Raum oder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Eine Abbildung  $f: M \rightarrow M'$ , welche die Struktur bewahrt heißt **Morphismus** (oder **Abbildung, Homomorphismus, stetig glatte Abbildung**).

Ist der Morphismus bijektiv, so existiert die Umkehrabbildung  $f^{-1}: M' \rightarrow M$  und man nennt ihn **Isomorphismus**.

Ist  $M' = M$ , so bildet die Menge der Isomorphismen die **Automorphismengruppe** auf  $M$ . ✖

Insbesondere die Automorphismengruppe wird wichtig werden, daher ein paar Beispiele:

- ▶ Sei  $M = \{1, 2, \dots, n\}$  eine Menge mit  $n$  Objekten. Dann ist  $\text{Aut } M$  die Gruppe aller bijektiven Abbildungen der Menge auf sich. Dies ist hier die Permutationsgruppe  $S_n = S(M)$ .
- ▶ Die Struktur reduziert gegebenenfalls die Automorphismengruppe. Sei  $M = \mathbb{R}^3$  (linearer Vektorraum), dann ist  $\text{Aut } M = \text{GL}(3, \mathbb{R})$ . Sie aber  $M = (\mathbb{R}^3, \cdot)$  (euklidischer Vektorraum), dann muss auch das Skalarprodukt erhalten bleiben, aus  $\text{GL}(3, \mathbb{R})$  bleiben nur die Drehungen und Spiegelungen übrig, es ist also  $\text{Aut } M = \text{O}(3) < \text{GL}(3, \mathbb{R})$ .

## 2.3 Die Symmetrie in der Gruppentheorie

### 2.3.1 Gruppenwirkung

2.8 **Definition** Sei  $G$  eine Gruppe. Die **Wirkung** von  $G$  auf eine Menge  $M$  ist ein Homomorphismus.

$$\begin{aligned} h: G &\rightarrow \text{Aut } M \\ g &\mapsto h(g) \\ \text{wobei } h(g): M &\rightarrow M \\ x &\mapsto h(g)x \end{aligned}$$
✖

Was sagt uns das? Eine Gruppe wirkt auf die Menge in der Art, dass alle möglichen Wirkungen bijektive Abbildungen der Menge auf sich selbst sind, dass jedem Gruppenelement eine dieser Abbildungen zugeordnet wird und dass jede dieser Abbildungen  $h(g)$  einem Element  $x$  eindeutig ein neues zuordnet.

► **Beispiel** Die Menge sei  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  und  $\text{Aut}(\mathbb{R}^3, \cdot) = \text{O}(3)$ . Dann ist die Wirkung auf ein Element  $\mathbf{r} \in (\mathbb{R}^3, \cdot)$

$$\begin{aligned}\text{O}(3) &\rightarrow \mathcal{M} \\ g &\mapsto \mathbf{D}(g) \\ h(g): (\mathbb{R}^3, \cdot) &\rightarrow (\mathbb{R}^3, \cdot) \\ \mathbf{r} &\mapsto \mathbf{D}(g)\mathbf{r}\end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{M}$  die Matrixgruppe aus Gleichung (1.4) ist. ▶

Wenn wir das als bekannt akzeptieren, können wir die Wirkung auf eine Funktion  $\psi(\mathbf{r})$  definieren, wobei  $\psi \in (C)(\mathbb{R}^3)$  eine stetige Funktion auf dem  $\mathbb{R}^3$  ist.

$$\begin{aligned}\text{O}(3) &\rightarrow \text{Aut } C(\mathbb{R}^3) \\ g &\mapsto h(g) \\ h(g): C(\mathbb{R}^3) &\rightarrow C(\mathbb{R}^3) \\ \psi &\mapsto h(g)\psi(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(\mathbf{D}^{-1}(g)\mathbf{r})\end{aligned}$$

### 2.3.2 Symmetrie und Symmetriegruppe

2.9 **Defintion** Es wirke eine Gruppe  $\mathcal{G}$  auf einer Menge  $M$ . Sei  $a \in M$ . Die Untergruppe  $\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{G} \mid ha = a\} < \mathcal{G}$  heißt **Symmetriegruppe, Symmetrie oder Fixpunktgruppe von  $a$** . ×

► **Beispiel** Sei  $\Delta = \{x_1, x_2, x_3\}$  ein gleichseitiges Dreieck und eine Gruppe  $\mathcal{G} = \text{SO}(3)$ . Dann ist die Symmetriegruppe  $C_3 = \{e, c_3 = R(120^\circ), c_3^2 = R(240^\circ)\} < \text{SO}(2)$ . ▶

### 2.3.3 Gruppendarstellung

2.10 **Defintion** Eine **lineare Darstellung** der Gruppe  $\mathcal{G}$  ist die Wirkung

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &\rightarrow \text{Aut } \mathbb{R}^n = \text{GL}(n, \mathbb{R}) \text{ oder} \\ \mathcal{G} &\rightarrow \text{Aut } \mathbb{C}^n = \text{GL}(n, \mathbb{C}) \text{ oder allgemein} \\ \mathcal{G} &\rightarrow \text{Aut } V \text{ mit dem Vektorraum } V.\end{aligned}$$

Dies wird später noch ausführlich behandelt. ×

## 2.4 Nebenklassen

Häufig werden Gruppen in Äquivalenzklassen eingeteilt. Dafür benötigen wir Äquivalenzrelationen.

2.11 **Defintion** Eine Beziehung  $\sim$  zwischen zwei Elementen  $g, h$  einer Menge  $\mathcal{M}$  (d.h. eine Teilmenge von  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ ) heißt **Äquivalenzrelation**, wenn gilt:

1. Sie ist reflexiv:  $g \sim g$
2. Sie ist symmetrisch: wenn  $g \sim h$ , dann  $h \sim g$
3. Sie ist transitiv: wenn  $g \sim h$  und  $h \sim k$ , dann  $g \sim k$

✖

Die **Äquivalenzklasse**  $[g] \subset \mathcal{M}$  besteht aus allen zu  $g$  äquivalenten Elementen der Menge

$$[g] = \{h \in \mathcal{M} \mid h \sim g\}. \quad (2.1)$$

$g$  heißt **Repräsentant** der Klasse.

Der folgende Satz zeigt, warum das so wertvoll ist.

- 2.2 **Theorem** Durch eine Äquivalenzrelation wird eine Menge in vollständig disjunkte Klassen zerlegt.

$$\mathcal{M} = \bigcup_g [g] \quad \text{und} \quad [g] \cap [h] = \emptyset \iff g \not\sim h \quad (2.2)$$

✖

**Beweis** Es kann keine leere Äquivalenzklasse geben, also  $[g] \neq \emptyset$ , da  $g \sim g$  sein muss. Jedes Element von  $\mathcal{M}$  liegt also in irgendeiner Klasse  $\Rightarrow \mathcal{M} = \bigcup_g [g]$ .

Sei  $[g] \cap [h] = x \in \mathcal{M}$ , dann gilt  $g \sim x$  und  $h \sim x$ . Auf Grund der Transitivität auch  $g \sim h$ . Dies für beliebige Elemente aus  $[g]$ ,  $\tilde{g} \in [g] = \tilde{g} \in [h]$  und umgekehrt, also  $[g] = [h]$ . Es gilt also  $[g] \cap [h] = \emptyset$  oder  $[g] = [h]$ . ■

► **Beispiel** Die ganzen Zahlen  $z_1, z_2, n_1, n_2$  erfüllen  $z_1 n_2 = z_2 n_1$  und es gilt

$$r_1 = \frac{z_1}{n_1} \sim \frac{z_2}{n_2} = r_2.$$

Rationale Zahlen bilden eine Äquivalenzklasse.

◀

Uns interessieren besonders Äquivalenzrelationen für Gruppen.

- 2.3 **Theorem** Sei  $\mathcal{H}$  eine Untergruppe von  $\mathcal{G}$  und seien  $g, h \in \mathcal{G}$ . Dann ist die Beziehung **äquivalent modulo  $\mathcal{H}$** , geschrieben  $\sim_{\text{mod } \mathcal{H}}$  mit

$$g \sim_{\text{mod } \mathcal{H}} h \iff g^{-1}h \in \mathcal{H} \quad (2.3a)$$

$$\text{d.h. } g\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \{gh \mid h \in \mathcal{H}\} \quad (2.3b)$$

eine Äquivalenzrelation in  $\mathcal{G}$ .

✖

**Beweis** ► Reflexivität:  $a^{-1}a \in \mathcal{H}$ , weil  $e \in \mathcal{H}$ , also  $a \sim_{\text{mod } \mathcal{H}} a$

► Symmetrie: Sei  $a^{-1}b \in \mathcal{H}$ , da  $\mathcal{H}$  Untergruppe muss auch  $(a^{-1} \cdot b)^{-1} = b^{-1}a \in \mathcal{H}$  sein, also  $a \sim_{\text{mod } \mathcal{H}} b \iff b \sim_{\text{mod } \mathcal{H}} a$ .

► Transitivität:  $a^{-1}b \in \mathcal{H}, b^{-1}c \in \mathcal{H} \Rightarrow (a^{-1}b)(b^{-1}c) = a^{-1}c \in \mathcal{H}$ . ■

Dieser Satz kann verwendet werden um wichtige Begriffe einzuführen, insbesondere die Schreibweise (2.3b) hat einen eigenen Namen.

2.12 **Definition** Die Äquivalenzklasse  $[g] \stackrel{(2.3b)}{=} g\mathcal{H}$  heißt **Rechtsnebenklasse** von  $g$  bezüglich  $\mathcal{H}$ . ✖

2.13 **Definition** Die Menge aller Rechtsnebenklassen bezüglich  $\mathcal{H}$  heißt **Faktormenge**  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ .  
Die Abbildung  $\pi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$  mit  $g \mapsto [g] = g\mathcal{H}$  heißt **Projektion**. ✖

Um das verständlicher zu machen, betrachten wir zwei einfache Beispiele.

Sei  $\mathcal{H} = (5\mathbb{Z}, +) \cong \{0, \pm 5, \pm 10, \dots\}$ , welches eine Untergruppe zu  $(\mathbb{Z}, +)$  ist. Eine Nebenklasse ist zum Beispiel

$$0(5\mathbb{Z}) = 0 + 5\mathbb{Z}, \\ 2(5\mathbb{Z}) = 2 + 5\mathbb{Z} = \{\dots, -8, -5, -3, 2, 7, 12, \dots\}.$$

Es gilt die Zerlegung

$$\mathbb{Z} = (0 + 5\mathbb{Z}) \cup (1 + 5\mathbb{Z}) \cup (2 + 5\mathbb{Z}) \cup (3 + 5\mathbb{Z}) \cup (4 + 5\mathbb{Z}).$$

Die Faktormenge ist

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{5\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}.$$

Es gilt  $\text{SO}(2) < \text{SO}(3)$ , wobei  $\text{SO}(2)$  die Drehungen um die  $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Achse enthalten soll. Die Nebenklasse sei  $g\text{SO}(2)$ , wobei  $g \in \text{SO}(3)$  und enthält alle Drehungen um die Achse  $g\hat{\mathbf{e}}_3$ . Die Faktormenge  $\text{SO}(3)/\text{SO}(2)$  enthält alle Drehachsen und Drehungen um diese. Sie ist isomorph zur 2-Sphäre  $S^2$ .

2.4 **Theorem** Ist  $\mathcal{H}$  endlich, so enthält jede Rechtsnebenklasse von  $\mathcal{H}$  genauso viele Elemente wie  $\mathcal{H}$  selbst. ✖

**BEWEIS** Zu zeigen ist: Die Abbildung  $\psi: \mathcal{H} \rightarrow g\mathcal{H}, h \mapsto gh$  ist bijektiv.

$g\mathcal{H}$  ist erst durch die Abbildung  $\psi$  definiert, also per Definition surjektiv.  $\psi$  ist auch injektiv, denn aus

$$\psi(k) = \psi(\ell) \iff gk = g\ell$$

folgt durch Multiplikation mit  $g^{-1}$  von links  $k = \ell$ . ■

Das heißt, jede endliche Gruppe  $\mathcal{G}$  lässt sich disjunkt in gleichmächtige Teilmengen  $g\mathcal{H} = \{gh, h \in \mathcal{H}, \mathcal{H} < \mathcal{G}, g \in \mathcal{G}\}$  bzw.  $\mathcal{H}g = \{hg, h \in \mathcal{H}, \mathcal{H} < \mathcal{G}, g \in \mathcal{G}\}$  zerlegen.

2.14 **Definition** Ist  $\mathcal{G}$  eine endliche Gruppe, so bezeichnet man die Anzahl der Elemente von  $\mathcal{G}$  als **Ordnung** von  $\mathcal{G}$ , geschrieben  $\text{ord } \mathcal{G}$  oder  $|\mathcal{G}|$ . ✖

2.15 **Definition** Ist  $\mathcal{G}$  eine endliche Gruppe und  $\mathcal{H} < \mathcal{G}$  Untergruppe, so heißt die Anzahl der Rechtsnebenklassen bezüglich  $\mathcal{H}$  der **Index** von  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{G}$ , geschrieben  $[\mathcal{G} : \mathcal{H}]$  oder  $\text{ind } \mathcal{H}$ . ✖

2.5 **Theorem** (ohne Beweis) Ist  $\mathcal{G}$  eine endliche Gruppe und  $\mathcal{H} < \mathcal{G}$ , so ist  $|\mathcal{H}|$  Teiler von  $|\mathcal{G}|$  und es gilt

$$|\mathcal{G}| = [\mathcal{G} : \mathcal{H}] \cdot |\mathcal{H}|$$

*Folgerung:* Ist  $|\mathcal{G}|$  Primzahl, so besitzt  $\mathcal{G}$  keine echten (eigentlichen) Untergruppen. ∞

## 2.5 Orbits und Bahnen

### 2.5.1 Einführung

2.16 **Definition** Es wirke die Gruppe  $\mathcal{G}$  auf die Menge  $M$ . Man sagt,  $x \in M$  ist  $\mathcal{G}$ -äquivalent zu  $y \in M$ , geschrieben  $x \stackrel{\mathcal{G}}{\sim} y$ , wenn es ein  $g \in \mathcal{G}$  mit  $y = gx$  ist. Eine Äquivalenzklasse  $[x]_{\mathcal{G}}$  unter der Relation  $\stackrel{\mathcal{G}}{\sim}$  heißt **Orbit** oder **Bahn** des Elements  $x \in M$ . Gibt es nur einen Orbit in  $M$ , so heißt die Wirkung von  $\mathcal{G}$  **transitiv**. ✖

Anmerkungen: ▶  $\stackrel{\mathcal{G}}{\sim}$  ist Äquivalenzrelation (ohne Beweis)

► Die Menge der Orbits wird  $M/\mathcal{G}$  bezeichnet. →

► **Beispiel** Sei  $\mathcal{G} = \text{SO}(3)$  und  $M = \mathbb{R}^3$ . Die Orbits von  $\text{SO}(3)$  auf  $\mathbb{R}^3$  sind Kugelschalen. Alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  mit  $|\mathbf{x}| = r$  liegen im selben Orbit.

$$\begin{aligned} M/\mathcal{G} &\simeq \text{Menge aller Radien} = \mathbb{R}^3/\text{SO}(3) \\ &= [0, \infty) . \end{aligned}$$

$e^{iHt/\hbar} |\psi\rangle$  ist der Orbit der Zeitentwicklung.

$$M = \text{Hilbertraum} , \quad \mathcal{G} = \text{U}(n) . \quad \blacktriangleleft$$

2.17 **Definition** Eine Teilmenge  $N \subset M$  heißt  $\mathcal{G}$ -invariant, wenn  $gN \subset N$  für alle  $g \in \mathcal{G}$ .  $\mathcal{G}$  ist also Symmetriegruppe von  $N$ , vgl. Definition 2.9. ✖

2.6 **Theorem** Es wirke  $\mathcal{G}$  auf  $M$ . Sei  $x \in M$  und  $\mathcal{H} < \mathcal{G}$  die Fixpunktgruppe von  $x$ , d.h.  $\mathcal{H}x = x$  (Def. 2.9). Dann gilt

1. Die Nebenklasse  $g\mathcal{H}$  besteht aus genau den Elementen, welche  $x$  in  $y = gx$  überführen.

2. Die Abbildung

$$gx \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$$

ist bijektiv. Ist  $\mathcal{G}$  endlich, so besitzt der Orbit genau genau  $[\mathcal{G} : \mathcal{H}]$  Elemente. ✖

### 2.5.2 Linkstranslation

2.18 **Definition** Sei  $k \in \mathcal{G}$ . Die Abbildung  $L(k)$  mit

$$L(k): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} , \quad g \mapsto kg$$

heißt **Linkstranslation**. ✖

Anmerkungen: ▶  $L(k)$  ist Automorphismus von  $\mathcal{G}$ , aber nicht der Gruppe  $(\mathcal{G}, \cdot)$ .

- Es gilt  $L(k_1, k_2) = L(k_1)L(k_2)$ , somit ist

$$L: \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut } \mathcal{G}, \quad k \mapsto L(k)$$

ein Homomorphismus (sogar Monomorphismus) und eine Gruppenwirkung, also

$$\mathcal{G} \text{ ist isomorph zum } \text{im } L < \text{Aut } \mathcal{G}. \quad (2.4)$$

→

- 2.7 **Theorem** (Satz von Cayley) Jede endliche Gruppe  $\mathcal{G}$  mit  $|\mathcal{G}| = n \in \mathbb{N}$  ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $S_n$ . ✖

**BEWEIS** ►  $\text{Aut } \mathcal{G} = S_n$  (siehe Beispiele nach Def. 2.7)

- Nach (2.4) ist  $\mathcal{G} \simeq \text{im } L < \text{Aut } \mathcal{G} = S_n$ . ■

- 2.8 **Theorem** Es wirke  $\mathcal{G}$  auf  $M$ ,  $M$  sei Fixpunktgruppe von  $x \in M$  und es sei  $y = gx$ ,  $g \in \mathcal{G}$ . Dann ist die Fixpunktgruppe von  $y$  gleich  $g\mathcal{H}g^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in \mathcal{H}\}$  und heißt konjugiert zu  $\mathcal{H}$ . ✖

## 2.6 Normalteiler

- 2.19 **Defintion** Eine Untergruppe  $\mathcal{H}$  von  $\mathcal{G}$  heißt **Normalteiler** oder **invariante Untergruppe** in  $\mathcal{G}$ , geschrieben  $\mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$ , wenn für jedes  $g \in \mathcal{G}$  gilt  $g\mathcal{H} = \mathcal{H}g$  oder  $\{gh \mid h \in \mathcal{H}\} = \{hg \mid h \in \mathcal{H}\}$  oder für jedes  $h \in \mathcal{H}$  und alle  $g \in \mathcal{G}$  gilt  $ghg^{-1} \in \mathcal{H}$ . ✖

Beachte: Es wird **nicht**  $ghg^{-1} = h$  gefordert. →

Normalteiler sind somit besondere Untergruppen, die erlauben, dass auch die Faktormenge Gruppenstruktur hat. Dies wird ausgedrückt in

- 2.9 **Theorem** Sei  $\mathcal{G}$  eine Gruppe,  $\mathcal{H} < \mathcal{G}$  Untergruppe, und  $\mathcal{G}/\mathcal{H} = \{g\mathcal{H} \mid g \in \mathcal{G}\}$  die Faktormenge. Wenn  $\mathcal{H}$  Normalteiler in  $\mathcal{G}$  ist, so kann man  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} g, k \in \mathcal{G}, \quad [g], [k] \in \mathcal{G}/\mathcal{H} \\ [g] \cdot [k] \stackrel{\text{def}}{=} [g \cdot k] \quad \text{oder} \quad g\mathcal{H} \cdot k\mathcal{H} = gk\mathcal{H} \end{aligned}$$

zu einer Gruppe, der sogenannten **Faktorgruppe** machen. ✖

Wir kennen bereits einen besonderen Normalteiler.

- 2.10 **Theorem** Ist  $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  ein Homomorphismus, so ist  $\ker f$  Normalteiler in  $\mathcal{G}$ . ✖

**BEWEIS** In den Übungen wurde gezeigt, dass  $\ker f < \mathcal{G}$ . Sei  $g \in \mathcal{G}$  und  $h \in \ker f$ , d.h.  $f(h) = e'$ . Dann gehört aber auch  $ghg^{-1}$  zum Kern, denn

$$f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)e'f(g)^{-1} = e'. \quad \blacksquare$$

Umgekehrt findet man:

2.11 **Theorem** *Sei  $\mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$ : Die Projektion (oder kanonische Abbildung)*

$$\begin{aligned}\pi: \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H} \\ g &\mapsto g\mathcal{H}\end{aligned}$$

ist ein Epimorphismus mit  $\ker \pi = \mathcal{H}$ . ✖

Die Kenntnis über den Epimorphismus  $\pi$  erlaubt die Einführung eines immer existierenden Monomorphismus.

2.12 **Theorem (Homomorphiesatz)** *Zu jedem Homomorphismus  $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  gibt es einen Monomorphismus*

$$\begin{aligned}\varphi: \mathcal{G}/\ker f &\rightarrow \mathcal{G}' \\ \text{mit } f &= \varphi \circ \pi\end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{G} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G}' \\ \pi \searrow & & \swarrow \varphi \\ & \mathcal{G}/\ker f & \end{array}$$

$\pi$  ist Epimorphismus (surjektiv) nach Satz 2.11,  $\mathcal{G}/\ker f$  ist Normalteiler nach Satz 2.10 und  $\varphi$  ist ein Monomorphismus (injektiv) nach Satz 2.12. ✖

2.20 **Definition** Eine Gruppe heißt **einfach**, wenn sie keinen eigentlichen (d.h. nichttrivialen) Normalteiler besitzt. Sie heißt **halbeinfach**, wenn sie keine eigentlichen abelschen Normalteiler hat. ✖

## 2.7 Konjugationsklassen

In Satz 2.8 haben wir konjugierte Untergruppen kennen gelernt. Was passiert bei der Konjugation eines einzelnen Gruppenelements?

### 2.7.1 Konjugation eines Elements

2.21 **Definition** Es wirke  $\mathcal{G}$  auf sich selbst über

$$\begin{aligned}\Phi: \mathcal{G} &\rightarrow \text{Aut } \mathcal{G} \\ k &\mapsto \Phi_k\end{aligned}\tag{2.5a}$$

$$\begin{aligned}\Phi_k: \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ g &\mapsto kgk^{-1}\end{aligned}\tag{2.5b}$$

### 2.7.1.1 Aussagen (o.B.) und Beziehungen dazu

- $\Phi_k$  ist Automorphismus für jedes  $k \in G$ .
- $\text{im } \Phi$  heißt *Gruppe der inneren Automorphismen*.
- $\ker \Phi = \{k \in G, kgk^{-1} = g \text{ für alle } g \in G\}$  heißt *Zentrum* von  $G$ , geschrieben  $C(G)$  und ist abelscher Normalteiler von  $G$ . Es folgt bei abelschen Gruppen  $C(G) = G$ .
- Die Fixpunktgruppe eines Elements  $g \in G$  heißt *Zentralisator* von  $g$ :

$$C_G(g) = \{k \in G \mid kgk^{-1} = g\}$$

- Die Fixpunktgruppe einer Untergruppe von  $G$ ,  $\mathcal{H} < G$ , heißt *Normalisator*  $N_G(\mathcal{H})$ .
- Der Orbit eines Elements  $g \in G$ :

$$\Phi_G g = \{k^{-1}gk, k \in G\}$$

heißt *Konjugationsklasse* von  $g$ . In einer anderen Sichtweise:

„ $g$  ist konjugiert zu  $h$ “ meint  $g \sim h \iff \text{es gibt ein } k \in G \text{ mit } h = kgk^{-1} = \Phi_k g$  ist Äquivalenzrelation und heißt Konjugationsklasse  $[g]$ .

### 2.7.1.2 Folgerungen

- $[e] = \{e\}$  bildet eine eigene Klasse und heißt *selbstkonjugiert*.
- Für eine abelsche Gruppe gilt, dass alle Elemente selbstkonjugiert sind.
- $g$  ist selbstkonjugiert  $\iff [g] = \{g\} \iff C_G(g) = G$ .
- Bei endlichen Gruppen gilt: Die Zahl  $r(g)$  der Elemente in  $[g]$  ist gleich

$$r(g) = [G : C_G(g)] = \frac{|G|}{|C_G(g)|}.$$

$$\sum_{[g]} r(g) = |G|$$

$$\sum_{[g]} \frac{1}{|C_G(g)|} = 1$$

► **Beispiel**  $C_{3v}$ : Es gibt drei Konjugationsklassen

$$\begin{array}{ll} \mathcal{K}_e = [e] & r(e) = 1 \\ \mathcal{K}_3 = [c_3] = \{c_3, c_3^2\} & r(c_3) = 2 \\ \mathcal{K}_\sigma = [\sigma_v] = \{\sigma_v, \sigma_{v'}, \sigma_{v''}\} & r(\sigma_v) = 3 \end{array}$$



## 2.7.2 Das Klassenprodukt

2.22 **Definition** Seien  $\mathcal{K}_1 = \{g_1, \dots, g_r\}$  und  $\mathcal{K}_2 = \{h_1, \dots, h_s\}$  Konjugationsklassen. Dann ist das **Klassenprodukt** definiert als

$$\mathcal{K}_1 \cdot \mathcal{K}_2 = \{g_i \cdot h_j \mid i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s\}.$$

✖

2.13 **Theorem** 1. Das Klassenprodukt ist kommutativ

$$\mathcal{K}_1 \cdot \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2 \cdot \mathcal{K}_1.$$

2. Es besteht aus vollständigen Klassen

$$\mathcal{K}_i \cdot \mathcal{K}_j = \sum_{\ell} h_{ij,\ell} k_{\ell}.$$

Vereinigung der Mengen, bei der mehrfach auftretende Elemente mehrfach berücksichtigt werden.

✖

► **Beispiel** Klassentafel von  $C_{3v}$ .

	$\mathcal{K}_e$	$\mathcal{K}_3$	$\mathcal{K}_{\sigma}$
$\mathcal{K}_e$	$\mathcal{K}_e$	$\mathcal{K}_3$	$\mathcal{K}_{\sigma}$
$\mathcal{K}_3$		$2\mathcal{K}_e + \mathcal{K}_3$	$2\mathcal{K}_{\sigma}$
$\mathcal{K}_{\sigma}$			$3\mathcal{K}_e + 3\mathcal{K}_{\sigma}$

◀

2.14 **Theorem** Eine Untergruppe ist ein Normalteiler dann und nur dann, wenn sie aus vollständigen Konjugationsklassen besteht.

✖

## 2.8 Neue Gruppen aus alten

### 2.8.1 Direktes Produkt

2.23 **Definition** Das **direkte Produkt**  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}'$  ist diejenige Gruppe, welche aus allen geordneten Paaren  $(g, g')$  mit  $g \in \mathcal{G}$  und  $g' \in \mathcal{G}'$  besteht und das Gruppenprodukt

$$(g_1, g'_1) \cdot (g_2, g'_2) = (g_1 g_2, g'_1 g'_2) \tag{2.6}$$

besitzt.

✖

Folgerungen: ▶ Einselement  $(e, e')$

- ▶ Inverses  $(g, g')^{-1} = (g^{-1}, g'^{-1})$
- ▶  $\{e\} \times \mathcal{G}' = \{(e, g') \mid g' \in \mathcal{G}'\} \cong \mathcal{G}'$

- ▶  $(g, e') \cdot (e, g') = (e, g') \cdot (g, e')$ , also kommutieren die Elemente der Untergruppe  $\{e\} \times G'$  mit den Elementen der Untergruppe  $G \times \{e'\}$ .
- ▶ Jedes Element aus  $G \times G'$  kann eindeutig als Produkt eines Elements aus  $G \times \{e'\}$  und eines aus  $\{e\} \times G'$  geschrieben werden.  $\rightarrow$

2.15 **Theorem** Eine Gruppe  $G$  ist das direkte Produkt ihrer Untergruppen  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{K}$ , geschrieben  $G = \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ , wenn gilt

1.  $hk = kh$  für alle  $h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}$ .
2. jedes  $g \in G$  kann eindeutig geschrieben werden als  $g = hk$  mit  $h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}$ .

$\mathcal{H}$  und  $\mathcal{K}$  heißen direkte Faktoren von  $G$ .  $\times$

*Folgerungen:* ▶  $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \{e\}$ , denn wenn  $g \in \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ , dann ist  $g = ge = eg$ . Die Reihenfolge muss jedoch nach Satz 2.15-1 eindeutig sein, somit ist  $g = e$ .

- ▶  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{K}$  sind Normalteiler in  $G$ :  $\mathcal{H} \triangleleft G, \mathcal{K} \triangleleft G$ .
- ▶ Die Klassenprodukte sind  $\mathcal{K}_{ij} = \mathcal{H}_i \times \mathcal{K}_j$ , wobei  $\mathcal{H}_i$  ist Klasse in  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_j$  ist Klasse in  $\mathcal{H}$ .
- ▶ Die Faktorgruppen  $G/\mathcal{H}$  und  $G/\mathcal{K}$  sind isomorph zu  $\mathcal{K}$  bzw.  $\mathcal{H}$ :

$$\begin{aligned} G/\mathcal{H} &\cong \mathcal{K} \\ G/\mathcal{K} &\cong \mathcal{H} \end{aligned} \quad \rightarrow$$

## 2.8.2 Verallgemeinerung

Definition 2.23 und Satz 2.15 können auf direkte Produkte der Form

$$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$$

von  $n$  Gruppen erweitert werden.

## 2.8.3 Semidirekte Gruppen

Nicht immer lässt sich die Forderung 1 aus Satz 2.15 erfüllen. Dafür führt man eine Verallgemeinerung ein. Ein wichtiges Beispiel dafür ist, dass Drehungen und Translationen nicht vertauschen.

2.24 **Definition** Seien  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{K}$  Gruppen und  $\mathcal{H}$  wirke auf  $\mathcal{K}$  (Def. 2.8), d.h. es gibt einen Homomorphismus

$$Q: \mathcal{H} \rightarrow \text{Aut } \mathcal{K}$$

$$h \mapsto Q_h$$

$$Q_h: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$$

$$k \mapsto Q_h(k)$$

Das *semidirekte Produkt*  $\mathcal{H} \wedge \mathcal{K}$  ist die Menge aller geordneten Paare  $(h, k)$  mit dem Gruppenprodukt

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1 Q_{h_1}(k_2)). \quad (2.7)$$

✖

*Folgerungen:* ▶ Das Einselement ist  $(e, e')$ .

▶ Etwas Rechnung zeigt, dass das Assoziativgesetz gilt.

▶ Das Inverse ist  $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, Q_{h^{-1}}(k^{-1}))$ .

Damit ist  $\mathcal{H} \wedge \mathcal{K}$  eine Gruppe.

▶ Falls  $Q_h = \text{id}$  = Identität, dann ist  $\mathcal{H} \wedge \mathcal{K} = \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ .

▶ Es sind  $\mathcal{H} \wedge \{e'\} \cong \mathcal{H}$  und  $\{e\} \cong \mathcal{K} \cong \mathcal{K}$  Untergruppen von  $\mathcal{G}$  mit  $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \{e\}$ .

▶ Die Elemente von  $\mathcal{G}$  bestehen aus den geordneten Paaren  $g = (h, k)$ . Mit  $\tilde{h} \cong (h, e)$  und  $\tilde{k} = (e, k)$

$$g = hk = \tilde{k}\tilde{h} \quad (2.8)$$

Beachte die nicht intuitive Reihenfolge in (2.8). Diese ist entscheidend, denn es wäre

$$\begin{aligned} \tilde{h}\tilde{k} &= (h, e)(e, k) = (he, eQ_h(k)) \\ &= (h, Q_h(k)) \neq (h, k) \end{aligned}$$

▶  $\mathcal{K}$  ist Normalteiler von  $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G}/\mathcal{K} \cong \mathcal{H}.$$

Man kann also aus  $\mathcal{H} \wedge \mathcal{K}$  eine neue Gruppe bilden. Wann lässt sich eine Gruppe  $\mathcal{G}$  als semidirektes Produkt schreiben?

∞

2.16 **Theorem** Seien  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{K}$  Untergruppen von  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{K} \triangleleft \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \{e\}$  und  $g \in \mathcal{G}$  werde eindeutig dargestellt als Produkt  $g = kh$ ,  $h \in \mathcal{H}$ ,  $k \in \mathcal{K}$ . Dann kann  $\mathcal{G}$  geschrieben werden als semidirektes Produkt

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \wedge \mathcal{K}.$$

$\mathcal{H}$  wirkt auf  $\mathcal{K}$  über

$$Q_h(k) = hkh^{-1}.$$

(2.9)

✖

*Folgerungen:* (ohne Beweis) Ähnlich wie beim direkten Produkt gilt

$$\mathcal{G}/\mathcal{K} \cong \mathcal{H}.$$

$\mathcal{H}$  und  $\mathcal{K}$  können nicht vertauscht werden. Es ist nicht  $\mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G}$  gefordert.

∞

## 2.8.4 Beispiel

Die Euklidische Gruppe  $E(3)$  besteht aus

- Drehspiegelungen im affinen Raum

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &\rightarrow O(3) \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{R}\mathbf{x}, \quad \mathbf{R}^\top \mathbf{R} = 1, \quad \det \mathbf{R} = \pm 1\end{aligned}$$

- Translationen  $T(3)$  abelsche Gruppe

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3.$$

Die Euklidische Gruppe ist nun das semidirekte Produkt

$$O(3) \wedge T(3) = \{(\mathbf{R}, \mathbf{t}), \mathbf{R} \in O(3), \mathbf{t} \in T(3)\} \quad (2.10)$$

mit dem Gruppenprodukt

$$\{\mathbf{R}_1, \mathbf{t}_1\} \{\mathbf{R}_2, \mathbf{t}_2\} = \{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2, \mathbf{t}_1 + \mathbf{R}_2 \mathbf{t}_2\} \quad (2.11)$$

d.h. die Wirkung von  $O(3)$  auf  $T(3)$  ist die Wirkung auf  $\mathbb{R}^3$ .

Die Wirkung auf ein Element  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  ist

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{t}\} \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t}$$

Für ein Produkt gilt

$$\begin{aligned}\{\mathbf{R}_1, \mathbf{t}_1\} \{\mathbf{R}_2, \mathbf{t}_2\} &= \{\mathbf{R}_1, \mathbf{t}_1\} (\mathbf{R}_2 \mathbf{x} + \mathbf{t}_2) \\ &= \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{x} + \mathbf{R}_1 \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 \\ &= \{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2, \mathbf{t}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{t}_2\} \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Dies bestätigt die sinnvolle Definition in (2.11).

Das Gruppenprodukt lässt sich in einer geeigneten  $4 \times 4$ -Matrixdarstellung einfach als Matrixmultiplikation realisieren.

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{t}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

denn es ist

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{t}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{t}_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1 \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $T(3)$  ist Normalteiler von  $E(3)$ .
- $E(3)/T(3) \cong O(3)$ .

# 3

## Beispiele für Gruppen und deren Anwendungen

Das Ziel ist ein Verständnis für die Symmetriegruppen von Atomen, Molekülen und Kristallen zu erlangen.

### 3.1 Zur Drehgruppe $O(3)$

Die  $O(3)$  besteht aus allen längen- und winkelerhaltenden Automorphismen des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^3$ , also

$$O(3) = \text{Aut}(\mathbb{R}^3, \cdot) , \quad (3.1)$$

$$O(3) = \{R \in \mathbb{R}^3, R^T R = \mathbb{1}\} . \quad (3.2)$$

Man berechnet leicht

$$\det(R^T R) = (\det R)^2 = 1 \quad \text{also} \quad \det R = \pm 1 . \quad (3.3)$$

Es gibt offensichtlich einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \det: O(3) &\rightarrow \{-1, 1\} \\ R &\mapsto \det R \end{aligned} \quad (3.4a)$$

mit

$$\ker \det = SO(3) \quad (3.4b)$$

und der Faktogruppe

$$O(3)/SO(3) = \mathbb{Z}_2 . \quad (3.4c)$$

Bezüglich der Untergruppe  $SO(3)$  gibt es zwei Rechtsnebenklassen

$$eSO(3) = SO(3) = \text{eigentliche Drehungen}$$

$$iSO(3) = \text{uneigentliche Drehungen}$$

mit der Inversion

$$i = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} . \quad (3.5)$$

### 3.1.1 Zur Drehgruppe $SO(3)$

Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Matrizen  $R$  und der Drehachse sowie dem Drehwinkel?

Eine einfache Aussage dazu ist der folgende Satz.

- 3.1 **Theorem** Sei  $R \in SO(3)$  mit  $R \neq \mathbb{1}$ .  $R$  besitzt drei Eigenwerte, nämlich  $1, e^{i\varphi}$  und  $e^{-i\varphi}$ , und beschreibt eine Drehung um den Eigenvektor 1 (Fixpunkt, Drehachse) mit dem Winkel  $\varphi$ , vgl. (1.8).  $\bowtie$

Im Hauptachsensystem heißt das

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

In einem beliebigen Koordinatensystem findet man mit der Drehachse  $\hat{n}$  und dem Drehwinkel  $\varphi$

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{1} \cos \varphi + (\mathbb{1} - \cos \varphi) \hat{n} \otimes \hat{n} + \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{1} \cos \varphi + (\mathbb{1} - \cos \varphi) \hat{n} \otimes \hat{n} + \sin \varphi \hat{n} \times. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Eine einfachere Darstellung erreicht man unter Verwendung der Drehimpulsmatrizen in kartesischer Form

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}_i)_{jk} &= -i \varepsilon_{ijk} \\ \mathbf{L}_1 &= \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} i & \\ & \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sie erfüllen die Kommutatorrelation

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = i \varepsilon_{ijk} \mathbf{L}_k. \quad (3.9)$$

Bildet man den Vektor

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3)^\top \quad (3.10)$$

so findet man

$$-i\hat{n}\mathbf{L} = -i(n_1\mathbf{L}_1 + n_2\mathbf{L}_2 + n_3\mathbf{L}_3) \stackrel{(3.7)}{=} \hat{n} \times \quad (3.11a)$$

und

$$(-i\hat{n}\mathbf{L})^2 = \hat{n} \otimes \hat{n} - \mathbb{1}. \quad (3.11b)$$

Damit bildet man für  $R$ :

$$\begin{aligned}
 R &\stackrel{(3.7)}{=} \mathbb{1} \cos \varphi + (\mathbb{1} - \cos \varphi) \hat{n} \otimes \hat{n} + \sin \varphi \hat{n} \times \\
 &\stackrel{(3.11a)}{=} \mathbb{1} \cos \varphi + (\mathbb{1} - \cos \varphi) [\mathbb{1} + (-i\hat{n}L)^2] - i \sin \varphi \hat{n}L \\
 &= \mathbb{1} + (-i\hat{n}L)^2 \underbrace{(\mathbb{1} - \cos \varphi)}_{2 \sin^2 \varphi/2} - (i\hat{n}L) \sin \varphi \\
 &= \mathbb{1} + 2(i\hat{n}L)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - (i\hat{n}L) \sin \varphi = e^{-i\hat{n}L\varphi}. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Das Rechnen mit den Rotationsmatrizen kann mühselig sein.

► **Beispiel** Wie lautet die neue Drehachse der Verkettung  $R(\hat{m}, \chi)R(\hat{n}, \varphi)$ ? ▶

Abhilfe schafft hier die Ausnutzung der Beziehung zu  $SU(2)$ .

### 3.1.2 Die Gruppe $SU(2)$ und ihr Bezug zu $SO(3)$

$$SU(2) = \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid A^\dagger A = \mathbb{1}, \det A = 1\}. \tag{3.13}$$

Die Matrizen enthalten

- acht reelle Parameter
- vier reelle Bedingungen aus  $A^\dagger A = \mathbb{1}$
- eine reelle Bedingung aus  $\det A = 1$

was drei unabhängige Parameter ergibt. Eine sehr elegante Schreibweise ist

$$A = \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix} \tag{3.14a}$$

mit der Nebenbedingung

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{3.14b}$$

Im Vektorraum dieser Matrizen bilden die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

eine Basis, sodass

$$A \stackrel{(3.14a)}{=} \underset{(3.15)}{x_0 \mathbb{1} + ix_1 \sigma_1 + ix_2 \sigma_2 + ix_3 \sigma_3}. \tag{3.16}$$

Mit

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \tag{3.17a}$$

und

$$s = \frac{1}{2} \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^\top \tag{3.17b}$$

findet man

$$A = e^{-i\varphi \hat{n} \cdot \mathbf{s}} = \mathbb{1} \cos \frac{\varphi}{2} - i \hat{n} \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\varphi}{2} . \quad (3.18)$$

Aus einem Vergleich mit (3.14a) liest man ab:

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 \\ \hat{n} \sin \varphi/2 \end{pmatrix} , \quad 0 \leq \varphi \leq 4\pi . \quad (3.19)$$

Gleichung (3.19) zeigt, dass es eine bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \text{SU}(2) &\leftrightarrow S^3 = 3\text{-Sphäre} \\ e^{-i\varphi \hat{n} \cdot \mathbf{s}} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 \\ \hat{n} \sin \varphi/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gibt. Darüber hinaus gilt analog zu (3.9) die Relation

$$[\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j] = i \varepsilon_{ijk} \mathbf{s}_k \quad (3.20)$$

und somit gibt es einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \phi: \text{SU}(2) &\rightarrow \text{SO}(3) \\ e^{-i\varphi \hat{n} \cdot \mathbf{s}} &\mapsto e^{-i\varphi \hat{n} \cdot \mathbf{L}} \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\mathbb{1} \cos \frac{\varphi}{2} - i \hat{n} \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\varphi}{2} \xrightarrow[(3.18)(3.7)]{(3.21a)} \mathbb{1} \cos \varphi + (\mathbb{1} - \cos \varphi) \hat{n} \otimes \hat{n} + \sin \varphi \hat{n} \times \quad (3.21b)$$

Dabei beachte man aber  $A(\hat{n}, \varphi)$  und  $A(\hat{n}, \varphi + 2\pi)$  werden auf dasselbe Element in  $\text{SO}(3)$  abgebildet und entsprechen

$$x = \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 \\ -\hat{n} \sin \varphi/2 \end{pmatrix} , \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2 + \pi) \\ -\hat{n} \sin(\varphi/2 + \pi) \end{pmatrix} = -x$$

d.h. ein Punkt und sein Antipode auf  $S^3$ .

$$\ker \phi = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\} \cong \mathbb{Z}_2 .$$

Aus dem Homomorphiesatz 2.12 folgt

$$\underbrace{\text{SO}(3)}_{\text{im } \phi} \cong \underbrace{\text{SU}(2)/\mathbb{Z}}_{\ker \phi} \cong S^3/\mathbb{Z} = P^3 \quad (3.22)$$

wobei  $P^3$  der projektive Raum und damit die Menge aller Strahlen in  $\mathbb{R}^4$  ist.

Achtung, es gilt

$$\text{SO}(3) \cong \text{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 \cong \text{O}(3)/\mathbb{Z}_2 .$$

Daraus folgt nicht  $\text{SU}(2) \cong \text{O}(3)!$



Missing  
figure

► 3 Veranschaulichung des projektiven Raumes  $P^2$ .

### 3.1.3 Eine physikalische Konsequenz

Betrachten wir ein Spin-1/2-Teilchen, z.B. ein Elektron, in Ortsdarstellung.

$$\langle \mathbf{r} | \psi \rangle = \chi_{\uparrow}(\mathbf{r}) | \uparrow \rangle + \chi_{\downarrow}(\mathbf{r}) | \downarrow \rangle \quad (3.23a)$$

lässt sich darstellen als

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \chi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (3.23b)$$

Wie ändert sich die Wellenfunktion bei einer Rotation des Raumes?

$$U(\hat{n}, \varphi) \boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\chi}(R^{-1}(\hat{n}, \varphi)\mathbf{r}). \quad (3.24)$$

Wir erwarten offensichtlich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}^\dagger(R^{-1}\mathbf{r}) \boldsymbol{\chi}(R^{-1}\mathbf{r}) &= \boldsymbol{\chi}^\dagger(\mathbf{r}) \boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}) \\ &= \boldsymbol{\chi}^\dagger(\mathbf{r}) U^\dagger U \boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

also ist  $U$  unitär.

Die Darstellung der Rotationen im Raum ist bekannt.

$$R \stackrel{(3.12)}{=} e^{-i\hat{n}L\varphi}.$$

Aus der Theorie der Liegruppen (siehe weiter hinten) folgt: Es gibt genau eine unitäre Darstellung  $U$ , nämlich die, die Form wie (3.12) hat. Diese kennen wir bereits

$$U = e^{-i\hat{n}L\varphi} \quad (3.18)$$

oder mit (3.24)

$$e^{-i\hat{n}L\varphi} \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(e^{i\hat{n}L\varphi}\mathbf{r}). \quad (3.25)$$



- 4 Spiegelung an einer Ebene beschrieben durch die Ebenennormale  $\hat{n}$ .

Aus (3.25) kann man eine Besonderheit des Spins ablesen, bei einer Drehung um  $\varphi = 2\pi$  ergibt sich

$$e^{-i2\pi\hat{n}\cdot\mathbf{s}} \chi \stackrel{(3.16)}{=} (\mathbb{1} \cos \pi - i\hat{n}\sigma \sin \pi) \chi = -\chi .$$

Die Spinwellenfunktion ändert ihr Vorzeichen bei einer vollständigen Drehung.

Anderes Argument: Es erscheint sinnvoll, dass es einen Homomorphismus gibt, der zwischen  $U$  und  $R$  vermittelt (3.21a). Es war entscheidend, dass  $\mathbf{s}$  und nicht  $\sigma$  mit  $\mathbf{s} = \sigma/2$  verwendet wurde. Dies legt den Faktor  $1/2$  im Winkel fest.

### 3.1.4 Mit Spiegelungen: $O(3)$

Zusätzlich zu  $SO(3)$  Spiegelungen mit Matrixdarstellung aus Abbildung 4.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \underbrace{\hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{v})}_{\parallel \hat{n}} + \underbrace{\mathbf{v} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{v})}_{\perp \hat{n}} \\ &= \{\hat{n} \otimes \hat{n} + \mathbb{1} - \hat{n} \otimes \hat{n}\} \mathbf{v} . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Spiegelung:

$$\begin{aligned} \sigma(\hat{n})\mathbf{v} &\stackrel{(3.26)}{=} -\hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v} - 2\hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \underbrace{\{\mathbb{1} - 2\hat{n} \otimes \hat{n}\}}_{\sigma(\hat{n})} \mathbf{v} . \end{aligned} \quad (3.27)$$

► **Beispiel**  $\hat{n} = \hat{e}_3$  = Spiegelung an der  $x$ - $y$ -Ebene.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}(\hat{e}_3) &\stackrel{(3.27)}{=} \mathbb{1} - 2\hat{e}_3 \otimes \hat{e}_3 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}}_i \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{R(\hat{e}_3, \pi)} \\
 &= \mathbf{iR}(\hat{e}_3, \pi)
 \end{aligned}$$



## 3.2 Symmetrien im affinen Raum: E(3)

### 3.2.1 Der affine Raum

Kommen Verschiebungen (Translationen) hinzu, so wird nicht nur die Richtung des Vektors geändert, sondern auch sein Anknüpfungspunkt. Um dies behandeln zu können, führen wir ein:

3.1 **Definition** Ein Tripel  $(A, \varphi, V)$  heißt ein affiner Raum, wenn gilt:

1.  $A$  ist eine nichtleere Menge,  $V$  ist ein Vektorraum,  $\varphi: A \times A \rightarrow V$  ist eine surjektive Abbildung

$$(P, Q) \xrightarrow{\varphi} \varphi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

2. Zu  $P \in A$  und  $\mathbf{v} \in V$  existiert genau ein  $Q \in A$  mit  $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$  (Abtragen eines Vektors  $\mathbf{v}$  vom Punkt  $P$ ).

3. Für alle  $P, Q, R \in A$  gilt  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$  (Dreiecksregel).

4. Aus  $\overrightarrow{PQ} = 0$  folgt  $P = Q$ .

$A$  heißt Punktraum,  $V$  heißt Differenzraum.



Typischerweise im Ortsraum: Sowohl die Punkte als auch die Differenzen (Vektoren) werden durch dreikomponentige Spaltenvektoren dargestellt, also  $A = \mathbb{R}^3$ ,  $V = \mathbb{R}^3$

$$\varphi(\underbrace{\mathbf{x}, \mathbf{y}}_{\in A}) = \underbrace{\mathbf{y} - \mathbf{x}}_{\in V}$$

Es gelten alle Betrachtungen zu E(3) aus 2.8.4.



- 5 In der Ebene  $\perp \hat{n}$  betrachtet.

### 3.2.2 Einige Elemente (Symmetrieeoperationen) aus E(3)

- Rotationen  $\{R(\hat{n}, \varphi), 0\}$
- Translationen  $\{\mathbb{1}, \mathbf{t}\}$

Rotationen um eine Achse, die durch  $\mathbf{a} \neq 0$  geht:

$$\{\mathbb{1}, \mathbf{a}\} \{R, 0\} \{\mathbb{1}, \mathbf{a}\} \stackrel{(2.11)}{=} \{R, \mathbf{a} - R\mathbf{a}\} . \quad (3.28)$$

Besitzt  $\{R, \mathbf{t}\}$  immer Fixpunkte?

$$\{R, \mathbf{t}\} \mathbf{a} = \mathbf{a} \iff R\mathbf{a} + \mathbf{t} = \mathbf{a}$$

oder

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{a} - R\mathbf{a} \\ &\stackrel{(3.12)}{=} \left[ 2(i\hat{n}L)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + i\hat{n}L \sin \varphi \right] \mathbf{a} \\ &\stackrel{(3.11a)}{=} 2 \underbrace{\hat{n} \times \hat{n} \times \mathbf{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}_0 - \underbrace{(\hat{n} \times \mathbf{a}) \sin \varphi}_{\perp \hat{n}} \perp \hat{n} . \end{aligned}$$

Es gibt einen Fixpunkt, wenn  $\mathbf{t} \perp \hat{n}$ , siehe Abbildung 5.

Für ein beliebiges  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$  mit  $\mathbf{t}_1 \parallel \hat{n}$  und  $\mathbf{t}_2 \perp \hat{n}$ :

$$\{R(\hat{n}, \varphi), \mathbf{t}\} \stackrel{(2.11)}{=} \underbrace{\{\mathbb{1}, \mathbf{t}_1\}}_{\text{Translation}} \underbrace{\{R(\hat{n}, \varphi), \mathbf{t}_2\}}_{\text{Drehung mit Fixpunkt}}$$

Das Ergebnis ist eine Schraubung (Abb. 6).

Spiegelungen an einer Ebene, die durch den Ursprung geht:

$$\{\sigma(\hat{n}), 0\} \quad \text{vgl. (3.27)}$$

Missing  
figure

- 6 Eine Schraubung ist eine Translation mit einer Drehung mit Fixpunkt.

Missing  
figure

- 7 Ist  $t \parallel \hat{n}$ , so gibt es eine ganze Fixebene.

Ebene durch  $\mathbf{a} \neq 0$

$$\{\mathbb{1}, \mathbf{a}\}\{\boldsymbol{\sigma}(\hat{n}), 0\}\{\mathbb{1}, \mathbf{a}\}^{-1} = \{\boldsymbol{\sigma}(\hat{n}), \mathbf{a} - \boldsymbol{\sigma}(\hat{n})\mathbf{a}\} . \quad (3.29)$$

Spiegelung mit Translation  $\mathbf{t}$ , Fixpunkt:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma}(\hat{n})\mathbf{a} + \mathbf{t}$$

oder

$$\mathbf{t} = \mathbf{a} - \boldsymbol{\sigma}(\hat{n})\mathbf{a} \stackrel{(3.27)}{=} 2\hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{a}) \parallel \hat{n}$$

also nur vorhanden, wenn  $\mathbf{t} \parallel \hat{n}$  (Abb. 7).

Mit  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ ,  $\mathbf{t}_1 \parallel \hat{n}$ ,  $\mathbf{t}_2 \perp \hat{n}$ :

$$\{\boldsymbol{\sigma}(\hat{n}), \mathbf{t}\} = \{\mathbb{1}, \mathbf{t}_2\}\{\boldsymbol{\sigma}(\hat{n}), \mathbf{t}_1\} .$$

Spiegelung mit anschließender Translation (Abb. 8).



- 8 Eine Spiegelung mit anschließender Translation heißt Gleitspiegelung.

Rotationsinversion:

$$\{S(\hat{n}, \varphi), 0\} = \{R(\hat{n}, \varphi)i, 0\} \quad (3.30)$$

durch  $\mathbf{a} \neq 0$ :

$$\{\mathbb{1}, \mathbf{a}\} \{S(\hat{n}, \varphi), 0\} \{\mathbb{1}, \mathbf{a}\}^{-1} = \{S, \mathbf{a} - S\mathbf{a}\}.$$

Fixpunkt, wenn

$$[\mathbb{1} - S(\hat{n}, \varphi)]\mathbf{a} = \mathbf{t}. \quad (3.31)$$

Das Gleichungssystem (3.31) ist lösbar

$$\det(\mathbb{1} - S) = \begin{vmatrix} 1 + \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 1 + \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(1 + \cos \varphi) \neq 0 \quad \text{für } \varphi \neq \pi. \quad (3.32)$$

### 3.2.3 Anmerkungen

E(3) ist die Menge aller längenerhaltenden Isomorphismen (Isometrien) des affinen Raumes  $\mathbb{R}^3$ .

In der euklidischen Geometrie heißen zwei Teilmengen  $S, S' \subset \mathbb{R}^3$  **kongruent**, wenn es ein  $g \in E(3)$  gibt mit  $S' = gS$ .

Translationen, Schraubungen und Gleitspiegelungen besitzen keinen Fixpunkt.

Es gibt einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \det: E(3) &\rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\} \\ \{\mathbf{R}, \mathbf{t}\} &\mapsto \det \mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.33)$$

mit  $\ker \det = E(3)$  der eigentlichen euklidischen Gruppe oder Gruppe der starren Bewegungen.

Es gibt in einer Erweiterung die Doppelgruppe

$$SU(2) \wedge T(3)$$



- 9 In einem Ball mit Radius  $r > 0$  liegen nur endlich viele Punkte.

mit dem Gruppenprodukt

$$\{A_1, t_1\} \{A_2, t_2\} = \{bm A_1 A_2, t_1 + P(A_1) t_2\}.$$

Dabei ist  $P(A_1)$  die zu  $A_1$  gehörende Drehmatrix aus  $SO(3)$ .

### 3.3 Diskrete Symmetrien im $\mathbb{R}^3$

Das Ziel ist Einschränkungen von  $\mathbb{R}^3$  auf Systeme mit diskreten ausgezeichneten Punkten verstehen.

- 3.2 **Definition** Eine diskrete Symmetriegruppe im  $\mathbb{R}^3$  ist eine Untergruppe  $G$  von  $E(3)$  derart, dass für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}^3$  der Orbit  $Gx$  nur eine endliche Zahl von Punkten in jedem Ball  $B_r$  vom Radius  $r > 0$  enthält. ✖

Gibt es nur einen endlichen Bereich enthält die diskrete Symmetriegruppe keine Translationen, besitzt keinen Fixpunkt, ist endliche Untergruppe von  $O(3)$  und heißt **endliche Punktgruppe**.

Die **endliche Raumgruppe** ist eine diskrete Symmetriegruppe unendlich ausgedehnter Bereiche.

#### 3.3.1 Die Punktgruppen

Die Punktgruppen lassen sich aus vorherigen Elementen aufbauen. Gestartet werden kann immer mit der einfachsten

$$C_n = \langle c_n \rangle. \quad (3.34)$$

Das Hinzufügen weiterer Elemente ist nicht beliebig möglich.

► **Beispiel** SU(2) verwenden um neue Drehwinkel zweier aufeinanderfolgender Drehungen zu berechnen

$$\begin{aligned}
 A(\hat{n}, \varphi)A(\hat{m}, \chi) &\stackrel{(3.18)}{=} \left( \mathbb{1} \cos \frac{\varphi}{2} - i(\hat{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left( \mathbb{1} \cos \frac{\chi}{2} - i(\hat{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin \frac{\chi}{2} \right) \\
 &\stackrel{(3.17a)}{=} \mathbb{1} \left( \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\chi}{2} - (\hat{n} \cdot \hat{m}) \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\chi}{2} \right) \\
 &\quad - i\boldsymbol{\sigma} \left( \hat{n} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\chi}{2} + \hat{m} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\chi}{2} + \hat{n} \times \hat{m} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\chi}{2} \right) \\
 &= \mathbb{1} \cos \frac{\varphi}{2} - i(\hat{\ell} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin \frac{\varphi}{2}
 \end{aligned}$$

Spezialfall:  $\hat{n} \perp \hat{m}$  und  $\varphi = \chi = \pi/3$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \left( \cos \frac{\pi}{6} \right)^2 = \frac{3}{4} \quad \text{oder} \quad \varphi \approx \frac{2\pi}{4.34681} \Rightarrow \varphi \notin \mathbb{Q} \cdot \pi$$

nicht endlich!



### 3.3.2 Eigentliche und uneigentliche Punktgruppen

Eigentliche Punktgruppen enthalten keine Inversion und keine Spiegelung. Die Elemente entstammen der SO(3).

Inversion, Spiegelung und Drehspiegelung sowie Rotoinversion sind in uneigentlichen Punktgruppen enthalten. Dabei gilt der folgende Satz.

3.2 **Theorem** Sei  $\mathcal{G}$  eine endliche Punktgruppe und  $\mathcal{K}$  der Kern des Homomorphismus.

$$\begin{aligned}
 \det: \mathcal{G} &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\
 g &\mapsto \det g
 \end{aligned}$$

Dann gibt es drei Fälle:

1.  $\mathcal{G} = \mathcal{K}$ , d.h.  $\mathcal{G}$  ist eigentliche Punktgruppe
2. wenn  $\mathcal{G}$  die Inversion enthält, so ist  $\mathcal{G} = \mathcal{K} \cup i\mathcal{K}$ .
3. Wenn  $\mathcal{G} \neq \mathcal{K}$  und  $i \notin \mathcal{G}$ , dann ist  $\mathcal{G}$  isomorph zu einer eigentlichen Punktgruppe  $\mathcal{G}^+ = \mathcal{K} \cup \mathcal{K}^+$  mit  $\mathcal{K}^+ = \langle ig, g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{K} \rangle$ . ✖

Aus 2 und 3 liest man zwei Möglichkeiten ab, uneigentliche Punktgruppen zu bilden.

1. Bilde das direkte Produkt aus einer eigentlichen Punktgruppe mit  $\{e, i\}$ ,  $i$  = Inversion.
2. Zerlege die eigentliche Punktgruppe in Nebenklassen bezüglich eines Normalteilers vom Index 2.  $\mathcal{G} = \mathcal{N} \cup g\mathcal{N}$ ,  $g \notin \mathcal{N}$  und forme sie um zu  $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{N} \cup ig\mathcal{N}$ .

Beispiele für Gruppen in extra Aufstellung. Dies sind alle 14 möglichen Typen von Punktgruppen.

### 3.3.3 Die Doppelgruppen

Die Doppelgruppen werden in der Quantenmechanik bei Teilchen mit halbzahligem Spin benötigt. Gegeben sei die Projektion

$$p: \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3) \quad (3.35)$$

sowie eine Punktgruppe  $\mathcal{H} < \mathrm{SO}(3)$ . Die Hebung der Gruppe  $\mathcal{H}$  von  $\mathrm{SO}(3)$  nach  $\mathrm{SU}(2)$  heißt Doppelgruppe

$$\tilde{\mathcal{H}} = p^{-1}(\mathcal{H}) < \mathrm{SU}(2). \quad (3.36)$$

$\tilde{\mathcal{H}}$  ist Gruppe mit der Multiplikationsregel von  $\mathrm{SU}(2)$

$$\begin{aligned} g, h \in \tilde{\mathcal{H}} &\Rightarrow gh \in \tilde{\mathcal{H}} \quad \text{da} \quad p(gh) = p(g)p(h) \in \mathcal{H} \\ e \in \tilde{\mathcal{H}} &\quad \text{da} \quad p(e) = e \in \mathcal{H} \\ h \in \tilde{\mathcal{H}} &\Rightarrow h^{-1} \in \tilde{\mathcal{H}} \quad \text{da} \quad p(h^{-1}) = p(h)^{-1} \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

$|\tilde{\mathcal{H}}| = 2|\mathcal{H}|$ . Beachte  $c(\varphi + 2\pi) = c(\varphi)\bar{e}$  mit  $\bar{e} = c(2\pi) \neq e \in \mathrm{SU}(2)$  für jede Drehung.

#### ► Beispiel

$$C_3 = \{e, c_3, c_3^2\}$$

$$\tilde{C}_3 = \{e, c_3, c_3^2, c_3^3 = \bar{e}, c_3^3 = c_3\bar{e}, c_3^5 = c_3^2\bar{e}\}$$





# 4 Darstellungen

Wir benötigen in der Physik die Wirkung von Gruppenelementen auf Vektorräume. Diese wollen wir hier untersuchen.

## 4.1 Lineare und Matrixdarstellung

### 4.1.1 Darstellung

4.1 **Definition** Eine lineare Darstellung  $D$  einer Gruppe  $\mathcal{G}$  ist eine Gruppenwirkung

$$\mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(V, +, \cdot)$$

auf den Darstellungsraum  $V$ , bzw. ein Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} D: \mathcal{G} &\rightarrow \text{GL}(V) \\ g &\mapsto D(g) . \end{aligned}$$

✖

Bei uns meist  $V = \mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  (Matrixdarstellung).

Es gelten dabei folgende Bezeichnungen:

- ▶ Ist  $D$  ein Monomorphismus (injektiv), so heißt die Darstellung *treu*.
- ▶ Falls  $\text{id} \in D$ : trivial, Einheitsdarstellung, Einsdarstellung
- ▶  $D$  heißt unitäre Darstellung falls

$$\langle D(g)\mathbf{v} | D(g)\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle$$

für alle  $g \in \mathcal{G}$  und  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ . Andere Notation:  $D(g)^\dagger = D(g)^{-1}$ .

- ▶ Der Grad von  $D$  bezeichnet

$$\text{gr } D = \dim V .$$

### Beispiele

$\text{GL}(n, \mathbb{R})$ ,  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ ,  $\text{O}(n)$  sind ihre eigenen Darstellungen.

Lösungsraum  $\{f\}$  der linearen Helmholtzgleichung

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) + k^2 f(\mathbf{r}) = 0 , \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, k0 \frac{\omega}{c} \quad (4.1)$$

$\{f\}$  ist ein unendlich dimensionaler Vektorraum.

$$\mathcal{G} = \text{E}(3) , \quad g = \{f, \mathbf{t}\} .$$

$$D(f)f(\mathbf{r}) = f(g^{-1}\mathbf{r}) = f(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{t}) \quad (4.2)$$

$D(g)f(\mathbf{r})$  ist ebenfalls Lösung von (4.1).

Ähnliches funktioniert für die Lösung der Schrödinger-Gleichung.

## 4.1.2 Matrixdarstellung

Sei  $D$  eine lineare Darstellung auf  $V$  und  $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$  eine Basis von  $V$ . Dann gilt

$$D(g)\hat{e}_i = \sum_{j=1}^n \hat{e}_j D_{ji}(g) . \quad (4.3)$$

Aus diesen Entwicklungskoeffizienten baut man eine Matrix  $\mathbf{D}(g)$  auf.

$$[\mathbf{D}(g)]_{ij} = D_{ij}(g) . \quad (4.4)$$

Sprechweise:  $\hat{e}_i$  transformiert sich nach der  $i$ -ten Spalte von  $\mathbf{D}$ . Dabei

$$\mathbf{D}(g_1 g_2) = \mathbf{D}(g_1) \mathbf{D}(g_2) .$$

In einer Orthonormalbasis berechnet man

$$D_{ij}(g) = \langle \hat{e}_i | D(g) \hat{e}_j \rangle = \hat{e}_i^\dagger D(g) \hat{e}_j . \quad (4.5)$$

Bei einer Basistransformation gilt

$$\hat{e}'_i = \sum_j \hat{e}_j S_{ji} , \quad \hat{e}_j = \sum_i \hat{e}'_i (S^{-1})_{ji}$$

und

$$D(g)\hat{e}'_i = \sum_j D(g)\hat{e}_j S_{ji} \stackrel{(4.3)}{=} \sum_{j,k} \hat{e}_k D(g)_{kj} S_{ji} = \sum_\ell \underbrace{\hat{e}'_\ell \sum_{k,j} S_{\ell k}^{-1} D(g)_{kj} S_{ji}}_{D'_{\ell i}(g)} \quad (4.6a)$$

oder

$$\mathbf{D}'(g) = S^{-1} \mathbf{D}(g) S . \quad (4.6b)$$

## 4.1.3 Äquivalenz von Darstellungen

$\mathbf{D}'$  und  $\mathbf{D}$  aus (4.6b) beschreiben dieselbe Wirkung nur in verschiedenen Koordinatensystemen. Man nennt sie äquivalent. Dieser Begriff lässt sich verallgemeinern.

4.2 **Defintion** Seien  $D: \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(V)$  und  $D': \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(V)$  zwei Darstellungen von  $\mathcal{G}$ .  $D'$  heißt zu  $D$  äquivalent, wenn ein Isomorphismus

$$S: V \rightarrow V'$$

existiert mit

$$D(g) = S^{-1} D'(g) S$$

für alle  $g \in \mathcal{G}$ , d.h. wenn es für jedes  $g \in \mathcal{G}$  ein kommutierendes Diagramm gibt:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{D(g)} & V \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ V' & \xrightarrow{D'(g)} & V' \end{array}$$

✖

► **Beispiel**  $D$  in (4.3) ist in diesem Sinne äquivalent zur Matrix  $\mathbf{D}$ ,  $S$  ist die Abbildung auf die Koordinaten  $S: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ .

◀

#### 4.1.4 Unitäre Repräsentation

Äquivalente Darstellungen bilden Äquivalenzklassen (Repräsentanten). Häufig verwendet wird die unitäre Repräsentation.

4.1 **Theorem** *Sei  $D$  eine lineare Darstellung einer endlichen Gruppe  $G$  auf einem unitären Vektorraum  $V$  (d.h. einem Vektorraum mit unitärem Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ). Dann ist  $D$  äquivalent zu einer unitären Darstellung.* ✖

Zum Beweis führt man ein Skalarprodukt

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle D(g)\mathbf{v} | D(g)\mathbf{u} \rangle \quad (4.7)$$

ein. Durch  $1/|G|$  ist eine Beschränkung auf endlichen Gruppen gegeben. Kann man  $1/|G|$  durch ein *invariantes Maß* ersetzen, so ist eine Erweiterung auf unendliche Gruppen möglich.

#### 4.1.5 Neue Darstellungen aus alten

Hat man bereits eine Darstellung (oder mehrere), sind folgende auch Darstellungen:

**Subduktion** Sei  $D: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  eine Darstellung von  $G$  und  $\mathcal{H} < G$ : Die Einschränkung von  $D$  auf  $\mathcal{H}$ , bezeichnet als  $D/\mathcal{H}$ , ist Darstellung von  $\mathcal{H}$ .

**Direkte Summe** Seien  $U$  und  $V$  Untervektorräume von  $W$ ,  $W = U \oplus V$ ,  $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^\top$ , sowie

$$\begin{aligned} D_1: G &\rightarrow \mathrm{GL}(U) \\ D_2: G &\rightarrow \mathrm{GL}(V) \end{aligned}$$

Darstellungen. Dann ist

$$D = D_1 \oplus D_2: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$$

mit

$$(D_1 \oplus D_2)(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} D_1\mathbf{u} \oplus D_2\mathbf{v} \quad (4.8)$$

eine Darstellung auf  $W$  mit Darstellungsmatrizen

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Diese Blockform kann bei einem Basiswechsel in  $W$  verloren gehen.

**Direktes Produkt** Sei  $V$  Vektorraum mit Basis  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  und  $W$  Vektorraum mit Basis  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ . Seien weiterhin

$$D_1: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$$

$$D_2: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$$

Darstellungen. Dann ist

$$\begin{aligned} D = D_1 \otimes D_2: \mathcal{G} &\rightarrow \mathrm{GL}(V \otimes W) \\ g &\mapsto D(g) \\ D(g): V \otimes W &\rightarrow V \otimes W \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} &\mapsto D_1(g)\mathbf{v} \otimes D_2(g)\mathbf{w} \end{aligned}$$

eine Produktdarstellung auf  $V \otimes W$ .

Die typische Anwendung ist die Quantenmechanik mit mehreren Freiheitsgraden.

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 .$$

## 4.2 Reduzible und irreduzible Darstellungen

Woher weiß man, dass man bei einer optimalen Darstellung im Sinn von (4.9) angekommen ist.

### 4.2.1 Invariante Unterräume

4.3 **Defintion** Sei  $D$  eine endlichdimensionale Darstellung einer Gruppe  $\mathcal{G}$  auf dem Vektorraum  $V$ . Ein Untervektorraum  $W$  von  $V$  heißt **invariant** unter  $D$ , wenn  $D(g)\mathbf{w} \in W$  für alle  $\mathbf{w} \in W$  und alle  $g \in \mathcal{G}$  gilt. In einem solchen Fall kann man eine Darstellung  $D': \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{GL}(W)$  als Einschränkung  $D'(g) = D(g)|_W$  für jedes  $g \in \mathcal{G}$  definieren. Ist  $D$  unitär, so auch  $D'$ . ✖

4.4 **Defintion** Die Darstellung ist **reduzibel**, wenn es einen echten invarianten Unterraum gibt. Ansonsten ist  $D$  **irreduzibel**. Eindimensionale Darstellungen sind irreduzibel. ✖

Nichttrivialer Vektorraum:  $W \neq \{0\}$ . Echter Unterraum:  $W \neq V, W \neq \{0\}$ .

Konsequenz: In einer geeigneten Basis  $\mathbf{v} = (\mathbf{w}, \dots)^\top$  haben die Darstellungsmatrizen die Form

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}'(g) & \mathbf{N}(g) \\ 0 & \mathbf{D}''(g) \end{pmatrix} . \quad (4.10)$$

Weiterhin: Wenn der endlich dimensionale Vektorraum  $V$  in eine direkte Summe invarianten Unterräume

$$V = V^1 \oplus V^2 \oplus V^3 \oplus \cdots \oplus V^n \quad (4.11)$$

derart zerlegt werden kann, dass eine Darstellung von  $\mathcal{G}$  auf jedem Teilraum irreduzibel ist, so heißt  $D$  **vollständig reduzierbar** oder **vollreduzibel**.

Konsequenz:  $\mathbf{N}(g) = 0, \forall g \in \mathcal{G}$  in (4.10). ∞

## 4.2.2 Unitäre invariante Unterräume

Wir betrachten einen unitären Vektorraum  $V$  und seinen echten Unterraum  $W$ , sowie  $V = W \oplus W^\perp$ , wobei

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = 0 \text{ für alle } \mathbf{w} \in W\}. \quad (4.12)$$

4.2 **Theorem** *Sei  $D$  eine reduzible unitäre Darstellung einer Gruppe  $\mathcal{G}$  auf  $V$  und  $W$  ein echter invarianter Unterraum von  $V$ , so ist auch  $W^\perp$  einer.* ✖

**Beweis** Sei  $\mathbf{u} \in W^\perp$ , dann ist

$$\langle D(g)\mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | D^\dagger(g)\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | \underbrace{D(g^{-1})\mathbf{w}}_{\in W} \rangle = 0,$$

also  $D(g)\mathbf{u} \in W^\perp$ . ■

*Folge:* Jede endlichdimensionale unitäre Darstellung kann zerlegt werden in eine direkte Summe irreduzibler unitärer Darstellungen

$$D = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus D^{(3)} \oplus \cdots \oplus D^{(S)}. \quad (4.13)$$

Mit Darstellungsmatrizen in Blockform

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)} & & & 0 \\ & D^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D^{(S)} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

*Wichtige Konsequenz:* Für jede endliche Gruppe oder solche mit invariantem Maß können ihre endlichen Darstellungen vollständig reduziert werden, denn nach Satz 4.1 ist jede derartige Darstellung äquivalent zu einer unitären.

Die Matrizen nach (4.14) sind nicht eindeutig, aber in Äquivalenzklassen  $D^{(\alpha)}$  einteilbar. Man schreibt dann

$$D = \bigoplus_{\alpha=1}^k n_\alpha D^{(\alpha)}, \quad n_\alpha: \text{Häufigkeit}. \quad (4.15)$$

## 4.3 Bedeutende mathematische Grundlagen

Viele der später folgenden physikalischen Anwendungen beruhen auf grundlegenden mathematischen Aussagen, die hier vorgestellt werden.

### 4.3.1 Schur-Lemmatum

4.3 **Theorem** Seien  $D^{(i)}: \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{GL}(V^i)$ ,  $i = 1, 2$  zwei irreduzible Darstellungen von  $\mathcal{G}$ . Sei  $A: V^1 \rightarrow V^2$  eine lineare Abbildung mit

$$D^{(2)}(g)A = AD^{(1)}(g) \quad (4.16)$$

für alle  $g \in \mathcal{G}$ , d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V^1 & \xrightarrow{D^{(1)}(g)} & V^1 \\ \downarrow A & & \downarrow A \\ V^2 & \xrightarrow{D^{(2)}(g)} & V^2 \end{array}$$

kommutiert. Dann gilt

1.  $A$  ist ein Isomorphismus oder  $A = 0$ .
2. Falls  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  nicht äquivalent sind, so folgt  $A = 0$ .
3. Ist  $D = D^{(1)} = D^{(2)}$  und  $V = V^1 = V^2$  ein komplexer Vektorraum, dann gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit

$$A = \lambda \mathbb{1}_V$$

(gilt auch für unendliche Gruppen). ✖

### 4.3.2 Orthogonalitätsrelationen

Mit Hilfe von Satz 4.3 erhalten wir weitere Relationen, die von praktischem Nutzen sind.

4.4 **Theorem** Seien  $D^{(i)}: \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{GL}(V^i)$ ,  $i = 1, 2$  irreduzible Darstellungen von  $\mathcal{G}$  und  $B: V^1 \rightarrow V^2$  eine beliebige lineare Abbildung. Sei ferner

$$A = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} D^{(2)}(g^{-1})BD^{(1)}(g): V^1 \rightarrow V^2$$

$$\begin{array}{ccc} V^1 & \xrightarrow{A} & V^2 \\ \downarrow D^{(1)}(g) & & \downarrow D^{(2)}(g^{-1}) \\ V^1 & \xrightarrow{B} & V^2 \end{array}$$

Dann gilt:

1. Falls  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  nicht äquivalent sind, ist  $A = 0$ .
2. Falls  $D = D^{(1)} = D^{(2)}$  und  $V = V^1 = V^2$ , so ist

$$A = \lambda \mathbb{1}_V \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1}{\mathrm{gr} D} \mathrm{tr} B. \quad (4.17) \quad \text{✖}$$

4.5 **Theorem** Falls  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  nicht äquivalent sind, so gilt für alle  $i, j, k, \ell$

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} D_{ik}^{(2)}(g^{-1}) D_{\ell j}^{(1)}(g) = 0. \quad (4.18) \quad \times$$

4.6 **Theorem** Falls  $D = D^{(1)} = D^{(2)}$  und  $V = V^1 = V^2$ , so gilt

$$\frac{\text{gr } D}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} D_{ik}(g^{-1}) D_{\ell j}(g) = \delta_{ij} \delta_{k\ell}. \quad (4.19) \quad \times$$

Zusammenfassung:

$$\boxed{\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} D_{ik}^{(\alpha)}(g^{-1}) D_{\ell j}^{(\beta)}(g) = \frac{1}{\text{gr } D^{(\alpha)}} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{k\ell}} \quad (4.20)$$

oder speziell für unitäre Matrizen

$$\boxed{\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} D_{ki}^{(\alpha)}(g)^* D_{\ell j}^{(\beta)}(g) = \frac{1}{\text{gr } D^{(\alpha)}} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{k\ell}} \quad (4.21)$$

Dabei heißt  $\alpha = \beta$  identisch,  $\alpha \neq \beta$  nicht äquivalent. ∞

Sind  $D^{(\alpha)}$  und  $D^{(\beta)}$  äquivalent, aber nicht identisch, so gilt mit

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(\alpha)} &= \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}^{(\beta)} \mathbf{S} \\ \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} D_{ki}^{(\alpha)}(g)^* D_{\ell j}^{(\beta)}(g) &= \frac{1}{\text{gr } D^{(\alpha)}} S_{\ell k} S_{ij}^{-1} \end{aligned} \quad (4.22)$$

### 4.3.3 Satz von Burnside

Für die Grade der äquivalenten irreduziblen Darstellungen von  $\alpha$  gilt:

$$(\text{gr } D^{(1)})^2 + (\text{gr } D^{(2)})^2 + \dots + (\text{gr } D^{(r)})^2 = |\mathcal{G}|. \quad (4.23)$$

Dies ist ein wichtiges Werkzeug um zu bestimmen wie viele irreduzible Darstellungen es gibt.

## 4.4 Charaktere

Die Darstellungsmatrizen werden oft nicht benötigt, weil einfache Relationen reichen (Charaktere).

### 4.4.1 Definition

4.5 **Defintion** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ :  $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$  heißt *Spur*. ✖

Erinnerung: ▶ linear:

$$\text{linear: } \text{tr}(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 \text{tr } b m A_1 + \lambda_2 \text{tr } A_2 \quad (4.24)$$

▶ Basisunabhängigkeit

$$\text{tr } A = \text{tr}(TAT^{-1}) \quad (4.25a)$$

▶ Mit Eigenwerten  $\lambda_i$  von  $A$ :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (4.25b) \quad \infty$$

Die Spur ist basisunabhängig, also für einen Endomorphismus  $A$

$$\text{tr } A = \text{tr } A \quad (4.26)$$

Es gilt:

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (4.27)$$

4.6 **Defintion** Sei  $D: \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung von  $\mathcal{G}$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \chi_D: \mathcal{G} &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \text{tr}(D(g)) \end{aligned}$$

heißt *Charakter von D*. Umgekehrt heißt eine Abbildung

$$\chi: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$$

Charakter von  $D$ , wenn eine Darstellung von  $D$  existiert mit  $\chi = \chi_D$ . Der Charakter einer irreduziblen Darstellung heißt *irreduzibel*. ✖

### 4.4.2 Folgerungen

Äquivalente Darstellungen besitzen denselben Charakter. Bei direkten Summen

$$\chi_{D^{(1)} \oplus D^{(2)}} = \chi_{D^{(1)}} + \chi_{D^{(2)}}. \quad (4.28)$$

Kommutativität

$$\chi_D(gh) = \chi_D(hg). \quad (4.29)$$

Bei unitären Darstellungen gilt

$$\chi(g^{-1}) = \chi^*(g), \quad \forall g \in \mathcal{G} \quad (4.30)$$

Es gilt

$$\chi_D(hgh^{-1}) = \chi_D(g). \quad (4.31)$$

Alle Elemente in einer Konjugationsklasse haben denselben Charakter. Der Charakter des neutralen Elements ist die Dimension der Darstellung

$$\chi_D(e) = \text{gr } D.$$

### 4.4.3 Orthogonalitätsrelationen

Aus (4.20) folgt  $i = k$  und  $j = \ell$  und Summation über alle Elemente

4.7 **Theorem** Seien  $\chi^{(\alpha)}$  und  $\chi^{(\beta)}$  irreduzible Charaktere, dann gilt

$$\boxed{\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi^{(\alpha)}(g^{-1}) \chi^{(\beta)}(g) = \delta_{\alpha\beta}} \quad (4.32)$$

bzw. für unitäre Darstellungen

$$\boxed{\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi^{(\alpha)}(g)^* \chi^{(\beta)}(g) = \langle \chi^{(\alpha)} | \chi^{(\beta)} \rangle = \delta_{\alpha\beta}} \quad (4.33)$$

Das hat wichtige Konsequenzen mit praktischem Nutzen. Wie oft ist eine irreduzible Darstellung in einer unitären Darstellung enthalten? Nach (4.15)

$$D = \bigoplus_{\alpha=1}^k n_\alpha D^\alpha = n_1 D^{(1)} \oplus n_2 D^{(2)} + \dots$$

Damit aber auch

$$\chi = \sum_{\alpha=1}^k n_\alpha \chi^{(\alpha)} \quad (4.34)$$

Und somit:

$$n_\alpha \stackrel{(4.33)}{=} \langle \chi | \chi^{(\alpha)} \rangle \quad (4.35)$$

Wann sind zwei unitäre Darstellungen äquivalent? Wenn ihre Charaktere übereinstimmen folgt nach (4.35) dieselbe Zerlegung in äquivalente Darstellungen, d.h. dann sind die Darstellungen äquivalent.

Wann ist eine Darstellung irreduzibel?

$$\langle \chi | \chi \rangle \stackrel{(4.34)}{=} \sum_{\alpha} n_{\alpha}^2$$

also genau dann, wenn  $\langle \chi | \chi \rangle = 1$ .

### 4.4.4 Charaktere und Klassen

Sehr einfach folgt aus (4.31) und (4.32)

4.8 **Theorem**  $\mathcal{G}$  besitze  $k_g$  Konjugationsklassen mit je  $m_1, m_2, \dots, m_{k_g}$  Elementen und  $|\mathcal{G}| = \sum_{i=1}^{k_g} m_i$ , so lauten die Orthogonalitätsrelationen

$$\boxed{\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{i=1}^{k_g} \chi^{(\alpha)}(g_i^{-1}) \chi^{(\beta)}(g_i) m_i = \delta_{\alpha\beta}} \quad (4.36)$$

Nur die Repräsentanten werden benötigt. ✖

Ohne Beweis muss angegeben werden:

4.9 **Theorem** *Die Zahl der irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe ist gleich der Zahl ihrer Konjugationsklassen.* ✖

Dies ist ein bemerkenswertes Ergebnis, denn es gibt keine offensichtliche Verwandtschaft zwischen Konjugationsklassen und irreduziblen Darstellungen. Der Beweis erfordert die Frobenius-Algebra und die reguläre Darstellung. Zusammen mit (4.23) erhält man schon viel Information über die Darstellungen.

► **Beispiel**  $C_{3v}$  besitzt sechs Elemente  $|\mathcal{G}| = 6$  und drei Klassen  $k_g = 3$ . Mit Satz 4.9 und (4.23) folgt

$$(\text{gr } D^{(1)})^2 + (\text{gr } D^{(2)})^2 + (\text{gr } D^{(3)}) = 6$$

Die einzige Lösung ist

► 1-dim Darstellung 2×

► 2-dim Darstellung 1× ◀

Eine weitere Orthogonalitätsrelation folgt aus (4.36).

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{i=1}^{k_g} \chi^{(\alpha)}(g_i^{-1}) \chi^{(\beta)}(g_i) m_i &\stackrel{(4.36)}{=} \delta_{\alpha\beta} \\ \sum_{i=1}^{k_g} \chi^{(\alpha)}(g_i^{-1}) \underbrace{\sum_{\beta} \frac{m_i}{|\mathcal{G}|} \chi^{(\beta)}(g_i) \chi^{(\beta)}(g_j^{-1})}_{\delta_{ij}} &= \chi^{(\alpha)}(g_j^{-1}) \end{aligned}$$

also

$$\sum_{\beta} \chi^{(\beta)}(g_i) \chi^{(\beta)}(g_j^{-1}) = \frac{|\mathcal{G}|}{m_i} \delta_{ij} \quad (4.37)$$

#### 4.4.5 Die reguläre Rechtsdarstellung

4.7 **Defintion** *Die reguläre Rechtsdarstellung ist definiert durch die Matrizen*

$$R_{ij}(g) = \delta(g_i g g_j^{-1}) \quad (4.38a)$$

mit

$$\delta(h) = \begin{cases} 1 & \text{falls } h = e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.38b) \quad \text{✖}$$

Die reguläre Rechtsdarstellung besteht aus (i.a. sehr großen, d.h. so groß wie die Gruppentafel) Matrizen. Ihre Charaktere sind

$$\chi_R(g) \stackrel{(4.38)}{=} \sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|} \delta(g_i g g_i^{-1}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } h = e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.39)$$

Die reguläre Rechtsdarstellung enthält alle irreduziblen Darstellungen einer Gruppe, es gilt sogar (o.B.):

- 4.10 **Theorem** Die Vielfachheit der irreduziblen Darstellung  $D^{(\alpha)}$  in der regulären Rechtsdarstellung  $R$  ist  $n_\alpha = \text{gr } D^{(\alpha)}$ . ✖

**Vorsicht!** Die Darstellungen  $D^{(\alpha)}$  sind, i.a. nicht in Blockform in  $R$  enthalten. Sie können nicht einfach aus  $R$  abgelesen werden. Wie das gelingt folgt später. ∞

## 4.4.6 Beispiel: Zyklische Gruppen

### 4.4.6.1 Allgemein

Zyklische Gruppen haben  $|\mathcal{G}|$  Konjugationsklassen mit je einem Element. Also nach (4.23):

$$\sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|} (\text{gr } D^{(i)})^2 = |\mathcal{G}|$$

Es gibt  $|\mathcal{G}|$  eindimensionale Darstellungen.

Da alle Darstellungen eindimensional sind, gilt für die Charaktere von  $g$  mit  $g^{|\mathcal{G}|} = e$ :

$$\chi^{(\alpha)}(g^{|\mathcal{G}|}) = (\chi^{(\alpha)}(g))^{|\mathcal{G}|} = \chi^{(\alpha)}(e) = 1 \quad (4.40a)$$

also

$$\chi^{(\alpha)}(g) = \sqrt[|\mathcal{G}|]{1} \quad (4.40b)$$

eine (!) der  $|\mathcal{G}|$ -ten Wurzel von 1.

### 4.4.6.2 Beispiel: $C_3$

$$C_3 = \{c_3, c_3^2, e\}, \quad \sqrt[3]{1} = 1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$$

Die Charaktertafel lautet

	$e$	$c_3$	$c_3^2$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	$e^{2\pi i/3}$	$e^{4\pi i/3}$
$\chi^{(3)}$	1	$e^{4\pi i/3}$	$e^{2\pi i/3}$

### 4.4.6.3 Beispiel: Translationsinvarianz auf einem Gitter

Translationen

$$t(a), \quad t(\ell a) = t(a)^\ell \quad (4.41a)$$

$$t(\ell a)\psi(x) = \psi(x - \ell a) \quad (4.41b)$$

Periodische Randbedingungen

$$t(Na)\psi(x) = \psi(x) \quad (4.42a)$$

$$t(Na) = e \quad (4.42b)$$



► 10 Gitter mit Gitterkonstante  $a$ .

Zyklische Gruppe mit Darstellung = Charakteren

$$\chi^{(\alpha)}(t(\ell a)) \stackrel{(4.40b)}{=} e^{-2\pi i \alpha \ell / N} \quad (4.43)$$

Schreibe

$$k = \frac{\alpha}{N} \frac{2\pi}{a} \quad (4.44a)$$

$$\chi^{(\alpha)}(t(\ell a)) \stackrel{(4.43)}{=} \chi^{(k)}(t(\ell a)) = e^{ik\ell a} \quad (4.44b)$$

In der irreduziblen Darstellung  $k$  gilt dann für die Basisfunktionen

$$t(\ell a) \psi_k(x) = \psi_k(x - \ell a) \stackrel{(4.44b)}{=} e^{ik\ell a} \psi_k(x) \quad (4.45)$$

Dies ermöglicht das Einführen von

$$\psi_k(x) = e^{-ikx} M_k(x) \quad (4.46a)$$

wobei

$$M_k(x - a) \stackrel{(4.46a)}{=} e^{ik(x-a)} \psi_k(x - a) \stackrel{(4.45)}{=} e^{ikx} \psi_k(x) \stackrel{(4.46a)}{=} M_k(x) \quad (4.46b)$$

Dies ist das Bloch-Theorem.

## 4.5 Reelle Darstellungen

Oft interessieren in der Physik reelle Darstellungen. Ob es diese gibt, entscheidet sich an folgenden Kriterien nach Frobenius und Schur für irreduzible Darstellungen  $D$ :

1.  $D$  reell bzw. kann durch unitäre Transformationen in reelle Form gebracht werden, wenn gilt:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = +1 \quad (4.47a)$$

2.  $D$  ist äquivalent zu seinem konjugiert Komplexen  $D^*$ , kann aber nicht in reelle Form gebracht werden wenn

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi(g^2) = -1 \quad (4.47b)$$

3.  $D$  ist genau dann nicht äquivalent zu  $D^*$ , wenn

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi(g^2) = 0 \quad (4.47c)$$

Man kann aber immer eine reelle Darstellung aus zwei nicht-reellen gewinnen (nicht mehr irreduzibel).

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D^* \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D + D^* & i(D - D^*) \\ -i(D - D^*) & D + D^* \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

## 4.6 Produkt von Darstellungen und Clebsch-Gordan-Reihe

### 4.6.1 Produktdarstellungen

Wir betrachten Produkträume, z.B.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \psi(\mathbf{r}) \otimes |\uparrow\rangle \\ \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) &= \psi_1(\mathbf{r}_1) \otimes \psi_2(\mathbf{r}_2) \otimes \dots \end{aligned}$$

Allgemein

$$\mathbf{x} = \sum_{i,j} x_{ij} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j \in V \otimes W \quad (4.49)$$

Auf diese Vektoren wirkt nun eine Produktdarstellung.

**4.11 Theorem** Sei  $D^{(\alpha)}: \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(V)$  eine irreduzible Darstellung von  $\mathcal{G}$  mit Basis  $\{\mathbf{v}_1^{(\alpha)}, \dots, \mathbf{v}_n^{(\alpha)}\}$  und  $D^{(\beta)}: \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(W)$  eine solche mit Basis  $\{\mathbf{w}_1^{(\beta)}, \dots, \mathbf{w}_m^{(\beta)}\}$ . Dann ist die Produktdarstellung

$$D^{(\alpha \otimes \beta)} = D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}: \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(V \otimes W) \quad (4.50)$$

eine i.a. reduzible Darstellung auf dem Produktraum  $V \otimes W$  mit Basis  $\{\mathbf{v}_i^{(\alpha)} \otimes \mathbf{w}_j^{(\beta)}\}$  und den Matrixelementen

$$[D^{(\alpha)}(g) \otimes D^{(\beta)}(g)]_{rs,ij} = D_{ri}^{(\alpha)}(g) D_{sj}^{(\beta)}(g) \quad (4.51)$$

Name: direkte Produktdarstellung. Charaktere

$$\chi^{(\alpha \otimes \beta)} \stackrel{(4.51)}{=} \sum_{i,j} D_{ii}^{(\alpha)}(g) D_{jj}^{(\beta)}(g) = \chi^{(\alpha)}(g) \chi^{(\beta)}(g) \quad (4.52)$$

☒

## 4.6.2 Clebsch-Gordan-Reihe

Die Produktbasis ist nicht die einzige mögliche. Wechselt man zu einer neuen, kann die Produktdarstellung in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegt werden.

$$D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)} = \bigoplus_{\gamma} (\alpha\beta|\gamma) D^{(\gamma)} \quad (4.53a)$$

mit den Reduktionskoeffizienten

$$(\alpha\beta|\gamma) = \langle \chi^{(\alpha)} \chi^{(\beta)} | \chi^{(\gamma)} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi^{(\alpha)}(g)^* \chi^{(\beta)}(g)^* \chi^{(\gamma)}(g) \quad (4.53b)$$

Man sieht sofort

$$(\alpha\beta|\gamma) = (\beta\alpha|\gamma) \quad (4.53c)$$

Daraus folgt, dass es zwei Formen von Darstellungsmatrizen  $D^{(\alpha\otimes\beta)}$  gibt

1. in der natürlichen Basis  $\{\mathbf{v}_i^{(\alpha)} \otimes \mathbf{w}_j^{(\beta)}\}$ .
2. in der ausreduzierten Basis (Blockform für irreduzible Anteile).

nach unitärer Transformation (4.53a). Man bezeichnet die Basisvektoren mit

$$\mathbf{u}_k^{(\gamma,s)}, \quad s = 1, 2, \dots, \underbrace{(\alpha\beta|\gamma)}_{\alpha, i, \beta, j}, \quad k = 1, \dots, \overbrace{D^{(\gamma)}}^{\text{Anzahl notw. Basisvektoren für die Darstellung } \gamma} \quad (4.54)$$

Vielfachheit der Darstellung

Die Basistransformation lautet

$$\mathbf{u}_k^{(\gamma,s)} = \sum_{\alpha, i, \beta, j} \mathbf{v}_i^{(\alpha)} \otimes \mathbf{w}_j^{(\beta)} \langle \alpha i, \beta j | \gamma s k \rangle \quad (4.55)$$

mit den Clebsch-Gordan-Koeffizienten  $\langle \alpha i, \beta j | \gamma s k \rangle$ . Die Umkehrung lautet

$$\mathbf{v}_i^{(\alpha)} \otimes \mathbf{w}_j^{(\beta)} = \sum_{\gamma, s, k} \mathbf{u}_k^{(\gamma,s)} \langle \gamma s k | \alpha i, \beta j \rangle \quad (4.56)$$

Besser vertraut aus der Quantenmechanik ist wahrscheinlich die Bra-Ket-Notation

$$| \gamma s k \rangle = \sum_{\alpha i, \beta j} | \alpha i \rangle | \beta j \rangle \langle \alpha i, \beta j | \gamma s k \rangle \quad (4.57a)$$

$$| \alpha i \rangle | \beta j \rangle = \sum_{\gamma, s, k} | \gamma s k \rangle \langle \gamma s k | \alpha i, \beta j \rangle \quad (4.57b)$$

Relationen bei Orthonormalbasen:

$$\sum_{\gamma, s, k} \langle \alpha i, \beta j | \gamma s k \rangle \langle \gamma s k | \alpha' i', \beta' j' \rangle = \delta_{ii'} \delta_{jj'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} \quad (4.58a)$$

$$\sum_{\alpha i, \beta j} \langle \gamma s k | \alpha i, \beta j \rangle \langle \alpha i, \beta j | \gamma' s' k' \rangle = \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{ss'} \delta_{kk'} \quad (4.58b)$$

$$\langle \gamma s k | \alpha i, \beta j \rangle = \langle \alpha i, \beta j | \gamma s k \rangle \quad (4.59)$$

## 4.7 Methode der Projektionsoperatoren

Bisher wissen wir nur, dass Darstellungen in ihre irreduziblen Anteile zerlegt werden können. Nun wollen wir betrachten, wie das geht.

- Anwendungen:*
1. Finden aller irreduziblen Darstellungen einer Gruppe aus der regulären Darstellung, vgl. Abschnitt 4.4.5.
  2. Berechnen der Clebsch-Gordan-Koeffizienten in (4.55).

∞

### 4.7.1 Projektionsoperatoren

Sei  $V$  ein unitärer Vektorraum und  $V = W \oplus W^\perp$ . Für  $\mathbf{v} \in V$  gilt die eindeutige Zerlegung  $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp$  mit  $\mathbf{w} \in W$ ,  $\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$ . Der Operator

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: V &\rightarrow V \\ \mathcal{P}\mathbf{v} &= \mathbf{w} \end{aligned} \tag{4.60}$$

heißt Projektionsoperator.

- 4.12 **Theorem** Für den Projektionsoperator  $\mathcal{P}$  gilt  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$  (Idempotenz),  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger$  (selbstadjungiert),  $\text{im } \mathcal{P} = W$ ,  $\ker \mathcal{P} = W^\perp$ ,  $\mathcal{P} + \mathcal{P}^\perp = 1$  mit  $\mathcal{P}^\perp \mathbf{v} = \mathbf{w}^\perp$ .

Ist umgekehrt ein idempotenter, selbstadjungierter Operator  $\mathcal{P}: V \rightarrow V$  gegeben, so gilt  $V = \text{im } \mathcal{P} \oplus \ker \mathcal{P}$ ,  $\text{im } \mathcal{P} \perp \ker \mathcal{P}$ . ✖

### 4.7.2 Projektionen und Darstellungen

- 4.13 **Theorem** Sei  $D$  eine endlichdimensionale Darstellung einer Gruppe  $\mathcal{G}$  auf dem unitären Vektorraum  $V$ , der in die invarianten Teilräume  $W_1$  und  $W_2$  zerfällt. Sei  $\mathcal{P}$  ein Projektionsoperator auf  $W_1$ . Dann gilt für alle  $g \in \mathcal{G}$

$$D(g)\mathcal{P} = \mathcal{P}D(g), \quad [D(g), \mathcal{P}] = 0 \tag{4.61}$$

✖

- 4.14 **Theorem** Sei  $D$  eine endlichdimensionale Darstellung einer Gruppe  $\mathcal{G}$  auf dem unitären Vektorraum  $V$  und  $\mathcal{P}: W \rightarrow W$  ein Projektionsoperator mit  $[D(g), \mathcal{P}] = 0$  für alle  $g \in \mathcal{G}$ , so bilden  $\text{im } \mathcal{P}$  und  $\ker \mathcal{P}$  invariante Teilräume von  $V$ . ✖

- 4.15 **Theorem** Sei  $W$  ein invarianter Teilraum und  $\mathcal{P}$  ein Projektionsoperator auf  $W$  mit  $[D(g), \mathcal{P}] = 0$  für alle  $g \in \mathcal{G}$ .  $D$  ist genau dann auf  $W$  irreduzibel, wenn  $\mathcal{P}$  nicht in Projektoren  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  mit  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ ,  $[D(g), \mathcal{P}_i] = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $g \in \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = 0$ ,  $\mathcal{P}_i \neq 0$  zerlegt werden kann. ✖

Die Sätze 4.13 und 4.15 sagen uns, dass es Projektoren auf die invarianten Teilräume gibt. Aber wie finden wir diese? Dabei hilft

4.16 **Theorem** Sei  $D = \bigoplus_{\alpha=1}^k n_{\alpha} D^{(\alpha)}$  in unitäre irreduzible Darstellungen zerlegt und  $V$  entsprechend in eine Summe paarweise orthogonaler Unterräume

$$V = \bigoplus_{\alpha=1}^k \bigoplus_{i=1}^{n_{\alpha}} V_i^{(\alpha)}.$$

Sei  $\chi^{(\alpha)}$  ein irreduzibler Charakter von  $\mathcal{G}$ . Dann ist der lineare Operator

$$\mathcal{P}^{(\alpha)} = \frac{\text{gr } D^{(\alpha)}}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} \chi^{(\alpha)}(g)^* D(g) \quad (4.62)$$

ein Projektator auf den invarianten Teilraum

$$V^{(\alpha)} = \bigoplus_{i=1}^{n_{\alpha}} V_i^{(\alpha)}. \quad \times$$

*Konsequenz:* Man benötigt nur die Charaktere in Dimensionen der Darstellung (aus Tabelle) und erhält den Projektator für die vorhandene Darstellung  $D$ .  $\rightarrow$

*Achtung:* Die Zerlegung ist nicht eindeutig, wenn  $n_{\alpha} > 1$ , vgl. (4.62). Es wird nur auf den Teilraum in dem alle äquivalenten Darstellungen enthalten sind projiziert.  $\rightarrow$

### 4.7.3 Erzeugung einer symmetrieangepassten Basis

Wie findet man die Basisvektoren für die Blockdiagonaldarstellung? Dazu definiert man den basisunabhängigen „starken Projektionsoperator“ (*Achtung:* Kein Projektator im Sinn von Satz 4.12).

$$\mathcal{P}_{\ell k}^{(\alpha)} = \frac{\text{gr } D^{(\alpha)}}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} D_{\ell k}^{(\alpha)}(g)^* D(g). \quad (4.63)$$

Sei nun im Teilraum  $V_i^{(\beta)}$  ein Basisvektor  $\mathbf{e}_{ij}^{(\beta)}$  ( $j$ -ter Basisvektor), dann

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\ell k}^{(\alpha)} \mathbf{e}_{ij}^{(\beta)} &= \frac{\text{gr } D^{(\alpha)}}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} D_{\ell k}^{(\alpha)}(g)^* \sum_{m=1}^{\text{gr } D^{(\beta)}} \underbrace{\mathbf{e}_{im}^{(\beta)} D_{mj}^{(\beta)}(g)}_{(4.3)} \\ &= \delta_{\alpha\beta} \delta_{k\ell} \mathbf{e}_{i\ell}^{(\beta)}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Das heißt  $\mathcal{P}_{\ell k}^{(\alpha)}$  erzeugt aus einem Basisvektor  $\mathbf{e}_{ij}^{(\beta)}$  einen Partner-Basisvektor aus demselben Teilraum, falls  $\alpha = \beta$ ,  $k = j$ .

Insbesondere für  $\ell = k$ :

$$\mathcal{P}_{kk}^{(\alpha)} \mathbf{e}_{ij}^{(\beta)} (4.64) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{kk} \mathbf{e}_{ik}^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{kk} \mathbf{e}_{ij}^{(\beta)} \quad (4.65)$$

Das heißt  $\mathcal{P}_{kk}^{(\alpha)}$  projiziert auf den Raum  $\{e_{jk}^{(\alpha)} \mid 1 \leq j \leq n_{\alpha}\}$  der Basisvektoren zur  $k$ -ten Zeile der  $\alpha$ -ten irreduziblen Darstellung (mit allen Vielfachheiten). Es ist also tatsächlich ein Projektator.

Über folgende Konstruktionsvorschift trennt man nun noch die Teilräume der Vielfachheiten.

1. Betrachte den Projektionsoperator  $\mathcal{P}_{11}^{(\alpha)}: V \rightarrow V$ . Das Bild im  $\mathcal{P}_{ii}^{(\alpha)}$  ist der  $n_\alpha$ -dimensionale Teilraum der Basisvektoren zur ersten Zeile der  $\alpha$ -ten Darstellung.
2. Wähle eine Orthonormalbasis in diesem Teilraum

$$\{e_{k1}^{(\alpha)} \mid 1 \leq k \leq n_\alpha\}$$

Die Vektoren  $\{e_{kj}^{(\alpha)} \mid 1 \leq j \leq \text{gr } D^{(\alpha)}\}$  mit

$$e_{kj}^{(\alpha)} = \mathcal{P}_{j1}^{(\alpha)} e_{k1}^{(\alpha)}$$

bilden eine Orthonormalbasis im Teilraum  $V_k^{(\alpha)}$ , da Basisvektoren zu verschiedenen Zeilen einer unitären Darstellung ohnehin orthogonal sind. Es gilt nun aber auch  $V_k^{(\alpha)} \perp V_\ell^{(\alpha)}$  für  $k \neq \ell$ , denn

$$\langle e_{kj}^{(\alpha)} | e_{\ell j}^{(\alpha)} \rangle \stackrel{(4.64)}{=} \langle \mathcal{P}_{j1} e_{k1}^{(\alpha)} | \mathcal{P}_{j1} e_{\ell 1}^{(\alpha)} \rangle = \langle e_{k1}^{(\alpha)} | e_{\ell 1}^{(\alpha)} \rangle = \delta_{\ell k} . \quad (4.66)$$

## 4.8 Symmetrische und antisymmetrische Darstellungen

### 4.8.1 Äuferes Produkt von Darstellungen

**4.17 Theorem** Sei  $\mathcal{G} = \mathcal{H} \times \mathcal{K}$  ein direktes Produkt der Untergruppen  $\mathcal{H} < \mathcal{G}$  und  $\mathcal{K} < \mathcal{G}$  gemäß Def. 2.23. Sei ferner  $D: \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung von  $\mathcal{G}$ . Wenn  $D|_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \rightarrow \text{GL}(V)$  vollständig reduzierbar ist und  $V$  entsprechend zerlegbar ist

$$V = \bigoplus_{\alpha=1}^k \bigoplus_{i=1}^{n_\alpha} V_{i\mathcal{H}}^{(\alpha)} = \bigoplus_{\alpha=1}^k V_{\mathcal{H}}^{(\alpha)} . \quad (4.67)$$

so sind die Teilräume  $V_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}$  invariant bezüglich der Darstellung  $D|_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \rightarrow \text{GL}(V)$  und folglich auch bezüglich. (vgl. QM: Gemeinsame Eigenzustände kommutierender Observablen)  $\bowtie$

### 4.8.2 Anwendung auf die Symmetrisierung von Darstellungen

Sei  $D$  eine Darstellung einer Gruppe  $\mathcal{G}$  über den Vektorräumen  $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\alpha \rangle$  und  $W = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\alpha \rangle$ . Auf dem Produktraum  $V \otimes W = \langle \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j \mid i, j = 1, \dots, \alpha \rangle$  wirkt dann

1. die Gruppe  $\mathcal{G}$  mit dem direkten Produkt  $D \otimes D$ .
2. die Permutationsgruppe  $S_2 = (\{e, i\}, \cdot)$  mit dem Generator

$$S: V \otimes W \rightarrow V \otimes W$$

$$\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j \mapsto \mathbf{v}_j \otimes \mathbf{w}_i$$

Dieser kommutiert mit den Elementen von  $\mathcal{G}$ :

$$\begin{aligned}
 S(D \otimes D)(g) \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_i &= S(D(g) \mathbf{v}_i \otimes D(g) \mathbf{w}_i) \\
 &= S\left(\sum_{k,\ell} \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{w}_\ell D_{ki}(g) D_{j\ell}(g)\right) \\
 &= \sum_{k,\ell} \mathbf{v}_\ell \otimes \mathbf{w}_k D_{ki}(g) D_{j\ell}(g) \\
 &= D(g) \mathbf{v}_j \otimes D(g) \mathbf{w}_i \\
 &= (D \otimes D)(g) (\mathbf{v}_j \otimes \mathbf{w}_i) \\
 &= (D \otimes D)(g) S(\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j)
 \end{aligned}$$

3. Insgesamt wirkt also das direkte Produkt  $\mathcal{G} \times S_2$ . Die invarianten Unterräume von  $V \otimes W$  unter  $S_2$  sind

$$\begin{aligned}
 [V \otimes W]_+ &= \langle \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j + \mathbf{v}_j \otimes \mathbf{w}_i \rangle \\
 [V \otimes W]_- &= \langle \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j \otimes \mathbf{w}_i \rangle
 \end{aligned}$$

Sie sind auch invariant unter der Wirkung von  $\mathcal{G}$ :

$$\begin{aligned}
 (D \otimes D)(g) \{ \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j \pm \mathbf{v}_j \otimes \mathbf{w}_i \} &= \mathbf{v}_k D_{ki}(g) \otimes \mathbf{w}_\ell D_{\ell i}(g) \pm \mathbf{v}_k D_{kj}(g) \otimes \mathbf{w}_\ell D_{\ell i}(g) \\
 &= \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{w}_\ell \{ D_{ki}(g) D_{\ell i}(g) \pm D_{kj}(g) D_{\ell i}(g) \} \\
 &= \{ \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{w}_\ell \pm \mathbf{v}_\ell \otimes \mathbf{w}_k \} \frac{1}{2} \{ D_{ki}(g) D_{\ell i}(g) \pm D_{kj}(g) D_{\ell i}(g) \}
 \end{aligned}$$

vollständige Superposition von Elementen aus  $[V \otimes W]_\pm$ .

# 5

## Anwendungen von Gruppen und deren Darstellungen in der Physik

### 5.1 Entartungen in Spektren

#### 5.1.1 Die Symmetrie eines Hamiltonoperators

Energieniveaus sind Eigenwerte der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung.

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad \text{mit} \quad |\psi\rangle \in V = \text{Hilbertraum} \quad (5.1)$$

Sei  $\mathcal{G}$  eine Gruppe, die auf den Hilbertraum  $V$  wirkt. Diese Wirkung ist leicht zu bestimmen, wenn man die Wirkung der Gruppe auf den Ortsraum kennt (meist Symmetrieeoperationen).

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | D(g) | \psi_i \rangle &= (D(g)\psi_i)(\mathbf{r}) = \langle D^\dagger(g)\mathbf{r} | \psi_i \rangle = \langle \mathbf{R}^\dagger(g)\mathbf{r} | \psi_i \rangle \\ &= \langle \mathbf{R}^{-1}(g)\mathbf{r} | \psi_i \rangle = \psi_i(\mathbf{R}^{-1}(g)\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{R}(g^{-1})\mathbf{r}) \\ &= \sum_j D_{ij}(g)\psi_j(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dies legt die Gruppenelemente  $D_{ij}$  eindeutig fest.

Ist  $\mathcal{G}$  Symmetrie des Hamiltonoperators (Definition 2.9) muss gelten

$$HD(g) = D(g)H \quad \text{oder} \quad D(g)HD^{-1}(g) = H \quad \text{oder} \quad [H, D(g)] = 0 \quad \text{für alle } g \in \mathcal{G}. \quad (5.3)$$

und damit

$$HD(g)|\psi_{E_i}\rangle = D(g)H|\psi_{E_i}\rangle = ED(g)|\psi_{E_i}\rangle, \quad i \triangleq \text{Entartungsindex.} \quad (5.4)$$

#### 5.1.2 Invariante Unterräume und Entartung

5.1 **Theorem** Sei der Hamiltonoperator  $H$  invariant unter einer Gruppe  $\mathcal{G}$ , die auf seinen Hilbertraum  $V$  wirkt. Sei  $V^{(\alpha)}$  ein echter invarianter Unterraum von  $V$  zur irreduziblen Darstellung  $D^{(\alpha)}$ . ✖

Dann gilt in  $V^{(\alpha)}$  wegen (5.3):

$$D^{(\alpha)}(g)H = HD^{(\alpha)}(g) \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

Nach dem Schur-Lemma (Satz 4.3) folgt in  $V^{(\alpha)}$

$$H = \lambda_\alpha \text{id}_{V^{(\alpha)}} \quad \text{mit } \lambda_\alpha \in \mathbb{C}.$$

D.h.  $V^{(\alpha)}$  ist ein Eigenraum von  $H$  zum Eigenwert  $\lambda_\alpha$ . Der Entartungsgrad ist  $d_\alpha = \text{gr } D^{(\alpha)}$ .

- 5.2 **Theorem** Sei  $W_E$  Eigenraum zum Hamiltonoperator  $H$  mit Eigenwert  $E$  und Basis  $\{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ , d.h.  $H|\psi_i\rangle = E|\psi_i\rangle$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Es wirke eine Gruppe  $\mathcal{G}$  auf den Hilbertraum unter der  $H$  invariant ist.  $\bowtie$

Dann gilt:

$$HD(g)|\psi_i\rangle = D(g)H|\psi_i\rangle = ED(g)|\psi_i\rangle. \quad ((5.4))$$

Somit  $D(g)|\psi_i\rangle \in W_E$  und kann nach dessen Basis entwickelt werden

$$D(g)|\psi_i\rangle = \sum_{j=1}^n |\psi_i\rangle D_{ij}(g). \quad (5.5)$$

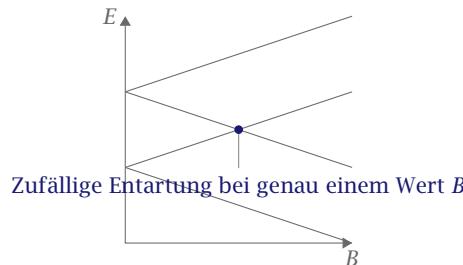
D.h.  $W_E$  ist invarianter Unterraum zu  $\mathcal{G}$  und  $\{|\psi_i\rangle\}$  ist Basis zu einer Darstellung von  $\mathcal{G}$  mit Darstellungsmatrix  $D$ .

Wichtige Unterscheidung

1.  $W_E$  ist echter invarianter Unterraum, also  $W_E = V^{(\alpha)}$  nach Satz 5.1. Die Entartung ist **symmetriebedingt** und gilt immer, solange  $[D(g), H] = 0$  für alle  $g \in \mathcal{G}$ . Der maximale Entartungsgrad eines Energieniveaus ist  $d_{\max} = \text{gr } D^{\max}$ , wobei  $D^{\max}$  die irreduzible Darstellung von  $\mathcal{G}$  mit der maximalen Dimension ist.
2.  $W_E$  ist reduzibel, also  $W_E = \bigoplus_{\alpha} n_{\alpha} V^{(\alpha)}$ . Zufällige Entartung (zweimal der gleiche Eigenwert  $\lambda_1$ )

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 D^{(1)} & & \\ & \lambda_1 D^{(2)} & \\ & & \lambda_3 D^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Atom im Magnetfeld



### 5.1.3 Standardbeispiel: Teilchen im Zentralpotential

#### 5.1.3.1 Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(|\mathbf{r}|) \quad (5.6)$$

dann

$$[H, l_i] = 0 \quad (5.7)$$

wobei  $l_i$  die Komponenten des Drehimpulses sind mit

$$[l_i, l_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} l_k . \quad (5.8)$$

Dann vertauscht  $H$  aber auch mit den Operatoren

$$R(\hat{n}, \varphi) = e^{-i\hat{n}l\varphi/\hbar} . \quad (5.9)$$

Nach (3.12) sind dies die Generatoren von

$$SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2 .$$

Symmetriegruppe von  $H$ :

$$SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2 . \quad (5.10a)$$

oder, weil  $i$  Symmetrie ist

$$O(3) = SO(3) \times i \quad (5.10b)$$

### 5.1.3.2 Irreduzible Darstellungen im Hilbertraum von (5.6)

Wissen aus der Quantenmechanik: Hamiltonoperator umschreiben in

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) + \frac{\mathbf{l}^2}{2mr^2} + V(|\mathbf{r}|) \quad (5.11)$$

Es gibt gemeinsame Eigenzustände zu  $\mathbf{l}^2$  und  $l_z$ :  $|lm\rangle$ . (5.11) hängt nicht von  $m$  ab, aber von  $l$ . Also hängen auch die Energien von  $l$  ab:  $E_{nl}$ .

Folglich: Invariante Unterräume werden von allen  $m$  zu einem  $l$  aufgespannt

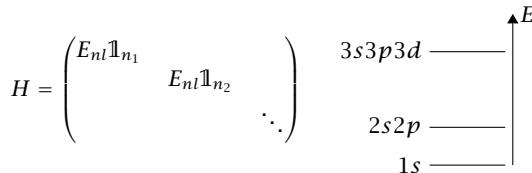
- ▶ 1-dimensional:  $E_{n0} |0, 0\rangle$
- ▶ 3-dimensional:  $E_{n1} |1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle$
- ▶ 5-dimensional:  $E_{n2} |2, -2\rangle, |2, -1\rangle, |2, 0\rangle, |2, 1\rangle, |2, 2\rangle$

Es gibt also 1-, 3-, 5-, ... dimensionale Darstellungen.

$$H = \begin{pmatrix} E_{n0} & & & & \\ & E_{n1} \mathbb{1}_{3 \times 3} & & & \\ & & E_{n2} \mathbb{1}_{3 \times 3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \uparrow E \\ 3s \text{ ---} \\ 2p \text{ ---} \\ 2s \text{ ---} \\ 1s \text{ ---} \end{array} \quad (5.12)$$

### 5.1.3.3 Spezialfall Coulomb-Potential

$V = \alpha/r$  hat kein Spektrum der Form (5.12) und hängt nicht von  $l$  ab



Zufällige Entartung? Nein! Es liegt eine höhere Symmetrie vor. Zusätzliche Erhaltungsgröße ist der Runge-Lenz-Operator:

$$\Lambda = \frac{1}{2\alpha m} (\mathbf{p} \times \mathbf{l} - \mathbf{l} \times \mathbf{p}) - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (5.13)$$

Es gilt nämlich

$$[H, \Lambda_i] = 0 \quad (5.14)$$

Welche Symmetrie liegt vor? Dazu führt man ein:

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{2} \left( \mathbf{l} + \frac{\Lambda}{\sqrt{-2H/m}} \right) \quad (5.15a)$$

$$\mathbf{J}_2 = \frac{1}{2} \left( \mathbf{l} - \frac{\Lambda}{\sqrt{-2H/m}} \right) \quad (5.15b)$$

$$[J_{1,i}, J_{1,j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_{1,k} \quad (5.16a)$$

$$[J_{2,i}, J_{2,j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_{2,k} \quad (5.16b)$$

$$[J_{1,i}, J_{2,j}] = 0 \quad (5.16c)$$

Jeder der Vektoren  $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$  bildet offensichtlich eine  $SU(2)$ -Algebra, beide kommutieren. Die Symmetriegruppe des H-Atoms ist also

$$i \times SU(2) \times SU(2) \cong O(4) . \quad (5.17)$$

### 5.1.4 Weiteres Beispiel (Teilchen im Kristallfeld)

Ausgangssituation: Atom im freien Raum  $O(3)$ -Symmetrie. Wird in einen Kristall mit kubischer Symmetrie eingebunden. Die Symmetriegruppe ist nun  $\mathcal{O} < O(3)$ .

Aus Tabellen entnimmt man, dass es folgende irreduzible Darstellungen gibt:

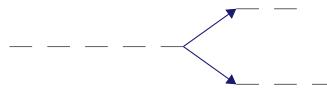
$A_1$ : Grad 1

$A_2$ : Grad 1

$E$ : Grad 2

$F_1$ : Grad 3

$F_2$ : Grad 3



► 11 Termaufspaltung der fünf  $d$ -Zustände.

Irreduzible Darstellung der  $\text{SO}(3)$ :  $D^\ell$  mit Grad  $2\ell + 1$ . Im kubischen Kristall sind die Unterräume zu  $\ell$  nicht mehr invariant, oder anders ausgedrückt, die Darstellungen  $D^\ell$  sind, wenn sie auf die Symmetrieelemente eingeschränkt werden, nicht mehr irreduzibel. Eine Zerlegung nach den irreduziblen Darstellungen von  $\mathcal{O}$  nach (4.35) ist erforderlich.

$$n_\alpha^{(\ell)} = \frac{1}{|\mathcal{O}|} \sum_{g \in \mathcal{O}} \chi^{*(\ell)}(g) \chi^{(\ell)}(g), \quad \alpha \in A_1, A_2, E, F_1, F_2 \quad (5.18)$$

Man findet:

$$D^{(0)} = A_1 \quad \text{bleibt invariant} \quad (5.19a)$$

$$D^{(1)} = F_1 \quad \text{bleibt invariant} \quad (5.19b)$$

$$D^{(2)} = E \oplus F_2 \quad (5.19c)$$

$$D^{(3)} = A_2 \oplus F_1 \oplus F_2 \quad (5.19d)$$

$$D^{(4)} = A_1 \oplus E \oplus F_1 \oplus F_2 \quad (5.19e)$$

$$D^{(5)} = E \oplus 2F_1 \oplus F_2 \quad (5.19f)$$

Man kann also Folgendes aus der Symmetrie ablesen: Die  $S$ - und  $P$ -Zustände bleiben entartet, sie bilden auch im kubischen Kristall einen invarianten Unterraum. Die fünf  $d$ -Zustände zerfallen in einen zweidimensionalen und einen dreidimensionalen Unterraum, d.h. es gibt eine Termaufspaltung.

## 5.2 Symmetriereduktion des Eigenwertproblems

### 5.2.1 Lösen durch Diagonalisieren einer Matrixdarstellung

Wähle eine beliebige orthonormal Basis:  $|e_j\rangle$ . Dann gilt

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

$$\sum_j \langle e_k | H | e_j \rangle \langle e_j | \psi \rangle = E \langle e_k | \psi \rangle$$

also

$$\sum_j H_{kj} \psi_j = E \psi_k \quad (5.20)$$

Gleichung (5.20) ist ein Eigenwertproblem, welches aus der linearen Algebra bekannt ist. Frage: Kann man das Eigenwertproblem (5.20) vereinfachen? Gibt es eine optimale Basis?

### 5.2.1.1 Symmetrieangepasste Basis

Das Ziel ist es, die Matrix  $H_{kj}$  aus (5.20) in Blockdiagonalform zu bringen.

$$\begin{pmatrix} * & & & & \\ * & * & & & \\ & & * & & \\ 0 & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Dazu zerlegt man den Hilbertraum  $V$  in invariante Teiräume

$$V = \bigoplus_{\alpha=1}^k \bigoplus_{i=1}^{n_\alpha} V_i^{(\alpha)} \quad (5.21)$$

mit entsprechender orthonormal Basis nach Abschnitt 4.7.3, nämlich

$$\{|e_{ij}^{(\alpha)}\rangle, \alpha = 1, \dots, k \wedge i = 1, \dots, n_\alpha \wedge j = 1, \dots, d_\alpha\} \quad (5.22)$$

Behauptung: Wenn die  $\{|e_{ij}^{(\alpha)}\rangle\}$  Basis zur irreduziblen Darstellung  $\alpha$  bilden, so tun das auch die Vektoren  $\{H|e_{ij}^{(\alpha)}\rangle\}$ .

#### BEWEIS

$$D(g)|e_{ij}^{(\alpha)}\rangle \stackrel{(5.2)}{=} \sum_{l=1}^{d_\alpha} |e_{ij}^{(\alpha)}\rangle D_{ij}^{(\alpha)}(g) \quad (5.23a)$$

$$D(g)H|e_{ij}^{(\alpha)}\rangle \stackrel{(5.3)}{=} HD(g)|e_{ij}^{(\alpha)}\rangle \stackrel{(5.23a)}{=} \sum_{l=1}^{d_\alpha} H|e_{ij}^{(\alpha)}\rangle D_{ij}^{(\alpha)}(g) \quad (5.23b)$$

Die Vektoren  $H|e_{ij}^{(\alpha)}\rangle$  transformieren sich nach der Darstellung  $D^{(\alpha)}$ , sind also ganz sicher

$$H|e_{ij}^{(\alpha)}\rangle \in V^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{(\alpha)} V_i^{(\alpha)} \quad \blacksquare$$

Eine wichtige Folgerung daraus ist, dass die Matrixdarstellung von  $H$  in Blöcke zerfällt.

$$H = \begin{pmatrix} H^{11} & & & & & & \} V^1 \\ & H^{22} & & & & & \} V^2 \\ & & \ddots & & & & \} V^\alpha \\ & & & H^{\alpha\alpha} & & & \} V^k \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & H^{kk} & \} V^k \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Dabei gilt

$$\langle e_{ij}^{(\alpha)} | H | e_{kl}^{(\beta)} \rangle = 0 \quad \text{für } \alpha \neq \beta \quad (5.25)$$

Die Blöcke  $H^{\alpha\alpha}$  lassen sich wieder vereinfachen und noch einmal in Blöcke zerlegen, denn es gilt

5.3 **Theorem** Seien  $\{v_m^\alpha \in V, m = 1, \dots, d_\alpha\}$  und  $\{w_n^\beta \in V, n = 1, \dots, d_\beta\}$  Basisvektoren zu den irreduziblen unitären Darstellungen  $\alpha$  und  $\beta$  von  $G$ , so gilt

$$\langle v_m^\alpha | v_n^\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta} \delta_{m, n} C^{(\alpha)}$$

wobei  $C^{(\alpha)}$  nicht von der Zeile der Darstellung  $m = n$  abhängt. ✖

### BEWEIS

$$\begin{aligned} \langle v_m^\alpha | w_n^\beta \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle D(g) v_m^\alpha | D(g) w_n^\beta \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{r, s} D_{rm}^{*(\alpha)}(g) D_{sn}^{(\beta)}(g) \langle v_r^\alpha | w_s^\beta \rangle \\ &\stackrel{(4.21)}{=} \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \underbrace{\frac{1}{d_\alpha} \sum_r \langle v_r^\alpha | w_r^\beta \rangle}_{=C^{(\alpha)}} \end{aligned} \quad (5.26)$$

wobei  $D(g)$  alle Darstellungen enthält. Der Koeffizient  $C^{(\alpha)}$  heißt reduziertes Matrixelement. ■

Folgerung für das Eigenwertproblem: Setze

$$\begin{aligned} v_m^{(\alpha)} &= |e_{im}^{(\alpha)}\rangle \\ w_n^{(\beta)} &= H |e_{jn}^{(\beta)}\rangle \end{aligned}$$

so folgt mit (5.26)

$$\langle e_{jn}^{(\beta)} | e_{jn}^{(\beta)} \rangle = \delta_{\alpha, \beta} \delta_{m, n} C_{ij}^{(\alpha)} \quad (5.27)$$

Das Matrixelement hängt nicht von Zählindex  $m = n$  der Vektoren innerhalb der Unterräume  $V_n^{(\alpha)}$  ab. Folglich gilt mit  $|e_{n_\alpha m}^{(\alpha)}\rangle$  jeweils Zeilen aus allen Vielfachheiten. Als Konsequenz ergibt sich:

- ▶  $H_{n_\alpha m}$  jeweils Zeilen aus allen Vielfachheiten. Als Konsequenz ergibt sich:
- ▶  $H^{\alpha, \alpha}$  ist aus  $d_\alpha$  identischen Blöcken aufgebaut.
- ▶ Man erhält  $n_\alpha$  (in der Regel verschiedene) Eigenwerte  $E_i^{(\alpha)}$
- ▶ Diese sind  $d_\alpha$ -fach entartet (identische Matrizen)
- ▶ Die Symmetrie allein unterteilt den Unterraum  $V^{(\alpha)}$  nicht weiter. Wie die Zerlegung (5.23a) aussieht, hängt vom Hamiltonoperator  $H$  ab.

Ein Beispiel: Im freien Raum sind die  $h$ -Zustände, also Quantenzahl  $l = 5$

$$D^{(5)} \stackrel{(5.19b)}{=} E \oplus 2F_1 \oplus F_2$$

entartet im kubischen Kristall lautet die Zerlegung des Unterraums: Damit existieren vier verschiedene Eigenwerte der Matrix  $H^{(5)}$ .

## 5.2.2 Störungsrechnung

Unser Ausgangspunkt ist ein Hamiltonoperator, der aus einem gestörten und ungestörten Anteil besteht

$$H = H_0 + H_1 .$$

Dabei hat  $H_0$  die Symmetrie  $\mathcal{G}_0$  und  $H_1$  die Symmetrie  $\mathcal{G}_1$ . Das Energieniveau  $E_0$  von  $H_0$  ist entartet. Spaltet es mit der Störung auf?

### 5.2.2.1 $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0$

Es gibt drei Fälle zu unterscheiden.

- Der Unterraum  $V^{(E_0)}$  zum Eigenwert  $E_0$  gehört zu einer *irreduziblen* Darstellung von  $\mathcal{G}$ . D.h.  $H_1$  verursacht nur eine Energieverschiebung.
- Der Entartungsraum ist *reduzibel*, aber jede Darstellung kommt nur ein Mal vor:

$$V^{(E_0)} = \bigoplus_{\alpha=1}^k V^{(k)} .$$

Die Störmatrix ist diagonal. Es liegt eine zufällige Entartung vor. Diese wird im allgemeinen durch die Störung  $H_1$  aufgehoben.

- Der Entartungsraum ist reduzibel, aber eine Darstellung kommt mehrfach vor. Es müssen Untermatrizen der Form (??) diagonalisiert werden.

### 5.2.2.2 $\mathcal{G}_1 < \mathcal{G}_0$

Die Darstellung  $D_0^{(\alpha)}$  ist i.a. für die Gruppe  $\mathcal{G}_1$  reduzibel, vgl. (??).

$$D_0^{(\alpha)} = \bigoplus_{\beta=1}^k n_\beta D_1^{(\beta)} .$$

Aufspaltung in  $\sum_{\beta=1}^k n_\beta$  Terme. Vorgehen wie in 5.2.2.1 2 und 3.

## 5.3 Übergangsmatrixelemente und Auswahlregeln

Ausgangspunkt ist ein Hamiltonoperator  $H_0$  mit Eigenzuständen  $|a\rangle$  und  $|b\rangle$ . Einschalten einer Störung, z.B. eine elektromagnetische Welle zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

$$H_1(t) = \Theta(t) [F e^{i\omega t} + F^\dagger e^{-i\omega t}] \quad (5.28a)$$

Die Übergangsrate berechnet sich zu

$$\Gamma_{a \rightarrow b} = \frac{2\pi}{\hbar} [\delta(E_b - E_a - \hbar\omega) |\langle b|F|a\rangle|^2 + \delta(E_b - E_a + \hbar\omega) |\langle b|F|a\rangle|^2] \quad (5.28b)$$

mit

$$F \sim \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{Dipolnäherung}). \quad (5.28c)$$

Es tritt also auf  $\langle b | \mathbf{p} | a \rangle$ . Für solche Betrachtungen sind also Vektor- oder allgemeiner Tensoroperatoren zu berücksichtigen. Symmetrien müssen bezüglich aller Komponenten beachtet werden. Um es besonders einfach zu machen sortieren wir die Komponenten so, dass irreduzible Darstellungen der Symmetrie auftreten.

### 5.3.1 Tensoroperatoren

Als erstes müssen wir das Verhalten verstehen. Betrachte die Observable  $S$  und unitäre Darstellung  $D(g)$  von  $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned} D(g): V &\rightarrow V \\ \psi &\mapsto D(g)\psi \quad \text{mit} \quad D(g^{-1}) = D(g)^{-1} = D(g)^\dagger. \end{aligned} \quad (5.29)$$

$S'$  ist dann der Operator, der auf die mit  $g$  transformierten Elemente der Hilbertraums wirkt.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{D(g)} & V \\ \downarrow S & & \downarrow S' \\ V & \xrightarrow{D(g)} & V \end{array} \quad \text{Folglich: } S' = D(g)SD(g^{-1}) \quad (5.30)$$

5.1 **Definition** Die Menge  $\{S_i^{(\alpha)}, i = 1, \dots, d_\alpha\}$  bildet einen Satz von **irreduziblen Tensoroperatoren**, wenn sich ihre Elemente nach der irreduziblen Darstellung  $D^{(\alpha)}$  von  $\mathcal{G}$  transformieren.

$$D(g)S_i^{(\alpha)}D(g^{-1}) = \sum_{j=1}^{d_\alpha} S_j^{(\alpha)} D_{ji}^{(\alpha)}(g). \quad (5.31) \quad \text{↗}$$

### 5.3.2 Beispiele

#### 5.3.2.1 Ortsoperator

Frage: Wie transformiert sich der Ortsoperator  $x_i$ ? Ist er Tensoroperator? Wir beginnen mit bekanntem Wissen: Transformation der Basisvektoren.

$$\hat{e}'_i \stackrel{(1,2)}{=} \sum_{j=1}^3 \hat{e}_j D_{ji}^{(V)}(g) = D^{(V)}(g) \hat{e}_i$$

Vektor in Orthonormalbasis

$$\mathbf{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 \quad (5.32)$$

Komponenten des transformierten Vektors

$$D^{(V)}(g)\mathbf{r} \stackrel{(5.32)}{=} \sum_i x_i D^{(V)}(g) \hat{e}_i \stackrel{(1,2)}{=} \sum_{i,j} x_i D_{ji}^{(V)}(g) \hat{e}_j \quad (5.33)$$

Damit

$$(D^{(V)}(g)\mathbf{r})_j = \sum_i x_i D_{ji}(g) \quad (5.34a)$$

$$(D^{(V)}(g^{-1})\mathbf{r})_i = \sum_j D_{ji}(g)x_j \quad (5.34b)$$

Wirkung auf ein Element des Hilbertraums, skalare Funktion

$$D(g)\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi((D^{(V)}(g^{-1})\mathbf{r})_1, (D^{(V)}(g^{-1})\mathbf{r})_2, (D^{(V)}(g^{-1})\mathbf{r})_3) \equiv \phi(\mathbf{r}) \quad (5.35)$$

Die Wirkung des Ortsoperators ist aus der Quantenmechanik bekannt

$$\hat{x}_i \psi(x_1, x_2, x_3) = x_i \psi(x_1, x_2, x_3) \quad (5.36)$$

Das folgende kommutierende Diagramm beschreibt dann die Wirkung im transformierten Raum.

$$\begin{array}{ccc} \psi & \xrightarrow{D(g)} & D(g)\psi = \phi \\ \downarrow x_i & & \downarrow x'_i \\ x_i \psi & \xrightarrow{D(g)} & x'_i \phi = D(g)x_i D(g^{-1})\phi \end{array}$$

Jetzt berechnet man

$$\begin{aligned} x'_i \phi(\mathbf{r}) &= D(g)x_i D(g^{-1})\phi(\mathbf{r}) \stackrel{(5.35)}{=} D(g) \underbrace{x_i \phi(D^{(V)}(g)\mathbf{r})}_{\phi(\mathbf{r}) \in V} \\ &= \tilde{\phi}(D^{(V)}(g^{-1})\mathbf{r}) = (D^{(V)}(g^{-1})\mathbf{r})_i \phi(\mathbf{r}) \quad (5.37) \end{aligned}$$

Man liest ab

$$D(g)\hat{x}_i D(g^{-1}) \stackrel{(5.37)}{=} (D^{(V)}(g^{-1})\hat{\mathbf{r}})_i \stackrel{(5.34b)}{=} \sum_j D_{ji}^{(V)}(g)\hat{x}_j \quad (5.38)$$

$\mathbf{r}$  transformiert sich wie die Basisvektoren  $\hat{e}_i$ , erfüllt (5.31) und ist somit irreduzibler Tensoroperator (Vektoroperator).

### 5.3.2.2 Impulsoperator

$$\hat{p}_i \psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x_1, x_2, x_3) \quad (5.39)$$

Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \psi & \xrightarrow{D(g)} & D(g)\psi = \phi \\ \downarrow p_i & & \downarrow p'_i \\ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi & \xrightarrow{D(g)} & \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'_i} \phi = D(g) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} D(g^{-1})\phi \end{array}$$

Dazu eine Nebenrechnung

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_j} (D(g)\psi)(\mathbf{r}) &\stackrel{(5.35)}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(D^{(V)}(g^{-1})\mathbf{r}) \\
 &= \sum_i \psi_{,i}(D^{(V)}(g^{-1})\mathbf{r}) \frac{\partial(D^{(V)}(g^{-1})\mathbf{r})_i}{\partial x_j} \\
 &\stackrel{(5.34b)}{=} \sum_i \psi_{,i}(D^{(V)}(g^{-1})\mathbf{r}) D_{ji}^{(V)}(g)
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Also

$$(D(g)\psi)_{,j} \stackrel{(5.40)}{=} \sum_i \psi_{,i}(D^{(V)}(g^{-1})\mathbf{r}) D_{ji}^{(V)}(g) \tag{5.41}$$

Durch Multiplikation mit  $D_{jk}^{(V)}(g)$  und Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen

$$D(g)(\psi_{,i}) \stackrel{(5.41)}{=} \sum_{j=1}^3 (D(g)\psi)_{,j} D_{ji}^{(V)}(g) \tag{5.42a}$$

oder

$$D(g)\hat{p}_i D(g^{-1}) = \sum_{j=1}^3 \hat{p}_j \underbrace{(D(g)\psi)}_{\phi} D_{ji}^{(V)}(g) = \hat{p}'_i \tag{5.42b}$$

aus dem kommutierenden Diagramm. Der Impulsoperator transformiert sich wie  $\hat{e}_i$  und  $\hat{x}_i$  und ist ein Vektoroperator.

### 5.3.2.3 Hamiltonoperator

Da der Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

die Symmetrie  $\mathcal{G}$  besitzt, gilt

$$D(g)HD(g^{-1}) = H$$

$H$  transformiert sich nach der Einsdarstellung.

### 5.3.3 Operatorprodukte

Zwei Sätze von Operatoren transformieren sich nach der Produktdarstellung

$$D_{lm,jn}^{(\alpha \otimes \beta)}(g) = D_{lj}^{(\alpha)}(g) D_{mn}^{(\beta)}(g) \tag{5.43}$$

$$\hat{x}'_j \hat{p}'_k = D_{lj}^{(V)}(g) D_{mn}^{(V)}(g) \hat{x}_l \hat{p}_m \tag{5.44}$$

Damit lässt sich auch das Transformationsverhalten des Drehimpulses bestimmen.

$$\hat{l}_i = \varepsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k, \quad \hat{l}_i \varepsilon_{irs} = \hat{x}_r \hat{p}_s - \hat{x}_s \hat{p}_r \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
D(g)\hat{l}_i D(g^{-1}) &\stackrel{(5.45)}{=} \varepsilon_{ijk} D_{lj}^{(V)}(g) D_{mn}^{(V)}(g) \hat{x}_l \hat{p}_m = -\varepsilon_{ijk} D_{lj}^{(V)}(g) D_{mn}^{(V)}(g) \hat{x}_m \hat{p}_l \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} D_{lj}^{(V)}(g) D_{mn}^{(V)}(g) (\hat{x}_l \hat{p}_m - \hat{x}_m \hat{p}_l) = \frac{1}{2} \varepsilon_{slm} \varepsilon_{ijk} D_{lj}^{(V)}(g) D_{mn}^{(V)}(g) \hat{l}_s \\
&= \det(D^{(V)}(g)) D_{si}^{(V)} \hat{l}_s
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Transformationsverhalten axialer Vektoren.

### 5.3.4 Wigner-Eckart-Theorem

Nun können wir eine wesentliche Aussage über das Verschwinden/Nichtverschwinden von Übergangsmatrixelementen fassen (Auswahlregeln). Sei  $\{S_i^{(\alpha)}, i = 1, \dots, d_\alpha\}$  ein Satz irreduzibler Tensoroperatoren zu  $D^{(\alpha)}$  und  $\{\psi_j^{(\beta)}, j = 1, \dots, m\}$  ein Satz von Basisfunktionen zu  $D^{(\beta)}$ . Dann gilt für eine Transformation

$$D(g) S_i^{(\alpha)} \psi_j^{(\beta)} = D(g) S_i^{(\alpha)} D(g^{-1}) D(g) \psi_j^{(\beta)} \stackrel{(5.31)}{=} \sum_{k,s} S_k^{(\alpha)} \psi_l^{(\beta)} D_{ki}^{(\alpha)}(g) D_{lj}^{(\beta)}(g)$$

Die Produktdarstellung ist im Allgemeinen reduzibel. Wir entwickeln nach irreduziblen Darstellungen  $\gamma$ .

$$S_i^{(\alpha)} \psi_j^{(\beta)} \stackrel{(4.56)}{=} \sum_{\gamma,s,k} \varphi_k^{(\gamma,s)} \langle \gamma sk | \alpha i, \beta j \rangle \tag{5.47}$$

Für uns interessant sind Übergänge, vermittelt durch die Matrixelemente.

$$\begin{aligned}
&\langle \psi_m^{(s)} | S_i^{(\alpha)} | \psi_j^{(\beta)} \rangle \neq 0? \\
&\stackrel{(5.47)}{=} \sum_{\gamma,s,k} \langle \psi_m^{(\varrho)} | \varphi_k^{(\gamma,s)} \rangle \langle \gamma sk | \alpha i, \beta j \rangle = \sum_s \langle \psi_m^{(\varrho)} | \varphi^{(\varrho,s)} \rangle \langle \varrho sm | \alpha i, \beta j \rangle
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Man schreibt üblicherweise

$$\langle \psi_m^{(\varrho)} | \varphi_m^{(\varrho,s)} \rangle = \langle \psi^{(\varrho)} | | S^{(\alpha)} | | \psi^{(\beta)} \rangle_s \tag{5.49}$$

und nennt es *reduziertes Matrixelement*. Das ist das Wigner-Eckart-Theorem.

#### 5.4 Theorem Die Abhängigkeit des Matrixelements

$$\langle \psi_k^{(\gamma)} | S_i^{(\alpha)} | \psi_j^{(\beta)} \rangle = \sum_s \langle \psi^{(\gamma)} | | S^{(\alpha)} | | \psi^{(\beta)} \rangle_s \langle \gamma sk | \alpha i, \beta j \rangle \tag{5.50}$$

von den Zeilenindizes (Komponentenindizes)  $i, j, k$  steht ausschließlich in den durch die Symmetrie bestimmten Clebsch-Gordan-Koeffizienten. ✖

## Anmerkungen

Allein die Symmetrie entscheidet durch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, ob mit einem Operator aus der Darstellung  $\alpha$  ein Übergang von einem Zustand aus  $\beta$  zu einem aus  $\gamma$  möglich ist. Sie entscheidet auch, welche Basisfunktionen  $j$  aus  $\beta$  mit welcher  $k$  aus  $\gamma$  kombinieren kann, wenn nur die Operatorkomponente  $S_i^{(\alpha)}$  wirkt.

Die Stärke des Übergangs entscheidet sich durch den Wert des Clebsch-Gordan-Koeffizienten und den Wert des reduzierten Matrixelements, der aber nicht von den verwendeten Komponenten abhängt.

Ist  $S$  ein invarianter Operator (z.B. skalarer Operator), so gilt

$$\langle \gamma sk | \alpha i, \beta j \rangle = \delta_{\gamma\beta} \delta_{kj} \quad (5.51a)$$

$$\langle \psi^{(\gamma)} | |S^{(\alpha)}| | \psi^{(\beta)} \rangle_s = \delta_{\gamma\beta} c_s^{(\beta)} \quad (5.51b)$$

Spezialfall (5.26), (5.27).

### 5.3.5 Anmerkungen

#### 5.3.5.1 Elektrischer Dipolübergang im Zentralpotential

Die Symmetrie des Potentials ist  $SO(3)$ , Basisfunktionen  $|n, l, m\rangle$ , irreduzible Darstellung  $l$ . Die Vektordarstellung  $D^{(V)}(\mathcal{G})$  ist (o.B.) identisch mit der Darstellung  $D^{(V)}(\mathcal{G})$  zu  $l = 1$ , also kann man für den Vektoroperator  $\mathbf{p}$  im Dipoloperator schreiben

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -p_{-1}^{(1)} E_1^{(1)} + p_0^{(1)} E_0^{(1)} - p_1^{(1)} E_{-1}^{(1)} \quad (5.52)$$

Zirkulare Basis:  $E_0 = E_z$ ,  $E_1 = (E_x + iE_y)/\sqrt{2}$ ,  $E_{-1} = (E_x - iE_y)/\sqrt{2}$ .

Sei nun beispielsweise

$$E_{-1}^{(1)} = E_0^{(1)} = 0 \quad (5.53a)$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -p_{-1}^{(1)} E_1^{(1)} \quad (5.53b)$$

Die Matrixelemente sind also

$$M \stackrel{(5.53b)}{\approx} E_1^{(1)} \langle n_1 l_1 m_1 | p_{-1}^{(1)} | n_2 l_2 m_2 \rangle \quad (5.54)$$

und das Wigner-Eckart-Theorem liefert

$$M \stackrel{(5.54)}{\approx} \sum_s \underbrace{\langle n_1 l_1 | |p^{(1)}| | n_2 l_2 \rangle_s}_{\text{hängt nicht von } m \text{ ab}} \underbrace{\langle l_1 s_1 m_1 | 1 - 1, l_2 m_2 \rangle}_{(*)} \quad (5.55)$$

(\*) bestimmt die Auswahlregeln und aus allgemeinen Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten folgt, dass  $m_1 = m_2 - 1$  und  $l_1 \in \{l_2 - 1, l_2 + 1\}$ , also  $\Delta m = -1$  und  $\Delta l = \pm 1$ .

### 5.3.5.2 Teilchen in einem Potential mit $C_{3v}$ -Symmetrie

Die Eigenzustände entstammen einer der folgenden drei irreduziblen Darstellungen.

	$e$	$\{c_3, c_3^2\}$	$\{\sigma_v, \sigma'_v, \sigma''_v\}$
$A_1$	1	1	1
$A_2$	1	1	-1
$E$	2	-1	0

Sei  $E = E_z \hat{e}_z$ , das Übergangsmatrixelement ist proportional zu  $\langle f|z|i\rangle$ .  $z$  transformiert sich mit der Einsdarstellung und es folgt nach (??) und (??)

$$\langle \gamma s k | A_1 0, B j \rangle = \delta_{\gamma \beta} \delta_{k j}$$

Es sind keine Übergänge zwischen Zuständen verschiedener Darstellungen möglich.

Sei nun  $E = E_x \hat{e}_x$  und  $\langle f|x|i\rangle$ . Anfangszustand sei eine Basisfunktion zu  $A_1$ . Der Dipoloperator stammt aus der Darstellung  $E$ . Ein Endzustand ist möglich aus  $D^{(+)} \subseteq A_1 \otimes E$ . (Dann verschwinden die Clebsch-Gordan-Koeffizienten nicht zwangsweise, es gibt Komponenten, für die sie nicht verschwinden) Also möglich aus  $A \otimes E = E$ .

Zweites Beispiel: Der Anfangszustand transformiert sich nach  $E$ . Der Endzustand ist möglich aus  $E \otimes E = A_1 \oplus A_2 \oplus E$  also beliebig.

# 6 Liegruppen

Liegruppen sind kontinuierliche Gruppen, die auch Eigenschaften einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit besitzen. Diese zusätzlichen Eigenschaften lassen sich zum Verständnis und in der praktischen Anwendung nutzen.

## 6.1 Was sind Liegruppen?

### 6.1.1 Vergleich mit diskreten Gruppen

#### 6.1.1.1 Indizes in diskreten Gruppen

In endlichen Gruppen lassen sich die Elemente einfach mit Zahlen aus  $\mathbb{Z}$  durchnummerieren.

► **Beispiel**  $C_n = \langle c_n \rangle$ . Eine mögliche Nummerierung ist

$$J_i = c_n^i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6.1)$$

mit der Indexmenge  $I = \{0, 1, \dots, n-1\} \subset \mathbb{Z}$ . ◀

Prinzipiell lässt sich dann die Verknüpfung der Gruppenelemente allein durch die Indizes ausdrücken, indem man eine Funktion  $\varphi$  einführt

$$\varphi: I \times I, \quad i, j \mapsto \varphi(i, j) \text{ mit } g_{\varphi(i, j)} = g_i \cdot g_j \quad (6.2)$$

► **Beispiel**  $C_n$ :  $\varphi(i, j) = i + j \bmod n$ . ◀

Eine häufige Notation ist  $i \rightarrow \bar{i}$  für das inverse Element und  $\varepsilon$  für das neutrale Element. Das funktioniert auch für abzählbar unendliche Gruppen,  $I = \mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{Z}^n$ .

#### 6.1.1.2 kontinuierliche Gruppen

Hängen von einem oder mehreren kontinuierlichen Indizes ab

$$\{g(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n\} \quad (6.3)$$

► **Beispiel** Matrixgruppen:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \quad (6.4) \quad \blacktriangleleft$$

Die Anzahl der unabhängigen reellen Parameter nennt man *Dimension der Gruppe*. Für die Parameter gilt dann z.B.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_3 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_4 \\ \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_3 & \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Die Gruppeneigenschaft überträgt sich auf den Parameterraum und es gilt für die Funktionen  $\varphi$ :

$$\gamma = \varphi(\alpha, \beta). \quad (6.6)$$

## 6.1.2 Algebraische topologische und differenzierbare Eigenschaften

### 6.1.2.1 Definition der Liegruppe

6.1 **Definition** Eine Liegruppe der Dimension  $v$  ist eine Menge  $G$ , die zugleich Gruppe und zusammenhängende  $v$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist und in der beide Eigenschaften analytisch vereint sind. ✖

1. Ist  $G(\alpha)g(\beta) = g(\gamma)$ , so gilt

$$\gamma = \varphi(\alpha, \beta), \quad \gamma^\mu = \varphi^\mu(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^v, \beta^1, \beta^2, \dots, \beta^v) \quad (6.7)$$

und die *Strukturfunktion*  $\varphi^\mu$  sind analytisch.

2. Die Gruppeneigenschaften spiegeln sich in den Eigenschaften der Strukturfunktionen  $\varphi$  wider.

► Assoziativität

$$\varphi(\varphi(\alpha, \beta), \gamma) = \varphi(\alpha, \varphi(\beta, \gamma)) \quad (6.8)$$

► Sei  $g(\varepsilon) = e$  das Einselement (meist  $\varepsilon = 0$ ), so gilt

$$\varphi(\varepsilon, \alpha) = \varphi(\alpha, \varepsilon) = \alpha \quad (6.9)$$

► Ist  $g(\bar{\alpha}) = g(\alpha^{-1})$ , so gilt

$$\varphi(\bar{\alpha}, \alpha) = \varphi(\alpha, \bar{\alpha}) = \varepsilon$$

und  $\bar{\alpha}$  hängt analytisch von  $\alpha$  ab.

### 6.1.2.2 Mannigfaltigkeiten

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind Verallgemeinerungen von glatten Flächen im Raum. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M^n$  der Dimension  $n$  ist ein (hausdorffscher topologischer) Raum, für den ein Koordinatennetz oder ein System von überlappenden Koordinatennetzen (einen Atlas) gibt.

Kartenabbildung

$$\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto \psi(p)$$

Mit einem Atlas überdeckt man die gesamte Mannigfaltigkeit  $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ . In einer nicht-leeren Schnittmenge gilt: Bei einem differenzierbaren Atlas sind alle  $\psi_{\alpha\beta}$  differenzierbar.

### 6.1.2.3 Beispiele

$$\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- ▶  $\varphi(\alpha) = \alpha$
- ▶ Der positive Halbstrahl  $\mathrm{GL}_+(1, \mathbb{R})$  ist eine Liegruppe. Er enthält das neutrale Element  $\varepsilon = 1$  und das zu  $\alpha$  inverse Element  $\bar{\alpha} = 1/\alpha$ .

$$\mathrm{U}(1) = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\} \cong S^1 \cong \mathrm{SO}(2)$$

- ▶ Ist eindimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit
- ▶  $\varphi(e^{i\phi}) = \phi \bmod 2\pi$
- ▶ neutrales Element  $\phi = 0$
- ▶ inverses Element  $\bar{\phi} = 2\pi - \phi$

### 6.1.2.4 weitere Anwendungen

6.2 **Definition** Eine Liegruppe heißt

- ▶ kompakt, wenn der Parameterbereich beschränkt ist (vgl.  $\mathrm{U}(1)$ )
- ▶ einfach, wenn sie nur die trivialen Normalteiler  $\mathcal{G}$  und  $\{e\}$  enthält
- ▶ halbeinfach, wenn außer  $\mathcal{G}$  alle anderen Normalteiler abelsch sind (vgl. Def. 2.20)  $\times$

Mit dem Wissen über Mannigfaltigkeiten können Liegruppen abstrakter als in Def. 6.1 eingeführt werden.

6.3 **Definition** Eine Liegruppe ist zugleich Gruppe und differenzierbare Mannigfaltigkeit  $\mathcal{G}$ , wobei das Gruppenprodukt

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

und die Abbildung von  $g$  nach  $g^{-1}$  differenzierbare Abbildungen sind.  $\times$

## 6.2 Liegruppe und Liealgebra

Die Liealgebra ist auf dem Tangentialraum der Mannigfaltigkeit gegeben.

▶ **Beispiel** zweidimensionale Liegruppe mit Koeffizienten  $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ .  $\blacktriangleleft$

### 6.2.1 Liealgebra einer Matrixgruppe

Die Gruppe habe die Elemente  $\mathcal{G} = \{g(\alpha)\}$ . Die Liealgebra ist der Tangentialraum am Einselement (normalerweise  $\alpha = \epsilon = 0$ ). Sie wird von den Erzeugenden

$$J_k = \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha^k} \right|_{\alpha=0} \quad (6.10)$$

aufgespannt.

► **Beispiel**  $U(1) = \{e^{i\phi} \mid 0 \leq \phi < 2\pi\}$

$$\left. \frac{d}{d\phi} e^{i\phi} \right|_{\phi=0} = i \quad (6.11)$$

Liealgebra von  $U(1)$  ist  $i\mathbb{R}$  oder anders ausgedrückt:  $i$  ist infinitesimaler Erzeuger von  $U(1)$ .

$$e^{i\phi} \approx 1 + i\phi \quad (6.12)$$



► **Beispiel**  $SO(3)$

$$g(\omega^1, 0, 0) \stackrel{(3.7)}{=} \mathbb{1} \cos \omega_1 + \hat{e}_1 \otimes \hat{e}_1 (1 - \cos \omega_1) + \sin \omega_1 \hat{e}_1 \times \quad (6.13a)$$

$$\left. \frac{dg}{d\omega^1} \right|_{\omega^1=0} \stackrel{(6.13a)}{=} \hat{e}_1 \times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{(3.8)}{=} -i\mathbf{L}_1 \quad \text{mit} \quad (\mathbf{L}_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} \quad (6.13b)$$



Mit dem Weg  $\{\alpha(t), t \in \mathbb{R}, \alpha(0) = 0\}$  im Parameterraum gilt

$$\left. \frac{dg}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{\kappa} \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha^{\kappa}} \right|_{\alpha=0} \left. \frac{d\alpha^{\kappa}}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{\kappa} \left. \frac{d\alpha^{\kappa}}{dt} \right|_{t=0} J_{\kappa} \quad (6.14)$$

Ist Vektor im Tangentialraum.

### 6.2.2 Linkstransport eines Tangentialvektors

Sei  $h \in \mathcal{G}$  und  $g(t)$  ein Weg nach (6.14), also durch die Identität mit Tangentialvektor

$$\mathbf{v} = \left. \frac{dg}{dt} \right|_0. \quad (6.15)$$

Dann ist  $hg(t)$  ein Weg durch  $h$  mit Tangentialvektor

$$\frac{d}{dt} hg(t) \quad (6.16)$$

aus dem Tangentialraum  $T_h \mathcal{G}$  an  $h$ .

Bezeichnung:  $\frac{d}{dt} hg(t)$  ist der **linkstransportierte Vektor**  $L_h \mathbf{v} \in T_h \mathcal{G}$ .

→

Die Menge der linkstransportierten Vektorfelder

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\rightarrow TG \\ g &\mapsto \mathbf{v}(g) = L_g \mathbf{v} \in T_g \mathcal{G}, \mathbf{v} \in T_e \mathcal{G} \end{aligned}$$

ist isomorph zur Liealgebra.

### 6.2.3 Kommutator und Liealgebra

Bilden die Tangentialvektoren eine Algebra? Dazu muss im Tangentialraum ein Produkt existieren. Eine Liealgebra liegt vor, wenn als binäre Operation (Produkt) der Kommutator vorliegt:

$$[\cdot, \cdot]: v \times v \rightarrow v \\ (A, B) \rightarrow [A, B] \quad (6.17)$$

Für die Basisvektoren muss also  $[J_\kappa, J_\lambda]$  wieder eine Linearkombination der  $J_\rho$  sein

$$[J_\kappa, J_\lambda] = C_{\kappa\lambda}^\rho J_\rho \quad (6.18)$$

Die  $C_{\kappa\lambda}^\rho$  heißen *Strukturkonstanten*. Dabei ist die Liealgebra immer durch die Gruppenstruktur gegeben. Die Strukturkonstanten bestimmen sich aus den Strukturfunktionen  $\varphi(\alpha, \beta)$ . Um das zu sehen starten wir mit

$$g(\alpha) = g(\beta)g(\alpha_0) \quad \text{für ein festes } \alpha_0 \quad (6.19)$$

Es folgt

$$\alpha = \varphi(\beta, \alpha_0) \quad (6.20a)$$

$$\beta = \varphi(\alpha, \alpha_0) \quad (6.20b)$$

$$\frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha^\kappa} \Big|_{\alpha_0} \stackrel{(6.19)}{=} \frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta^\rho} \Big|_{\beta=\varphi(\alpha_0, \alpha_0)=\varepsilon=0} \frac{\partial \beta^\rho}{\partial \alpha^\kappa} \Big|_{\alpha=\alpha_0} g(\alpha_0) \quad (6.21a)$$

wobei

$$\frac{\partial g(\beta)}{\partial \beta^\rho} \Big|_{\beta=0} = J_\rho \quad (6.21b)$$

$$\frac{\partial \beta^\rho}{\partial \alpha^\kappa} \Big|_{\alpha=\alpha_0} = \frac{\partial \varphi^\rho}{\partial \alpha^\kappa} \Big|_{\alpha_0} = \lambda_\kappa^\rho(\alpha_0) \quad (6.21c)$$

$$\frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha^\kappa} \Big|_{\alpha_0} = \lambda_\kappa^\rho(\alpha_0) J_\rho g(\alpha_0) \quad (6.22a)$$

insbesondere  $\alpha_0 = \alpha$

$$\frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha^\kappa} \Big|_{\alpha} = \lambda_\kappa^\rho(\alpha) J_\rho g(\alpha) \quad (6.22b)$$

$\alpha_0$  ist weiterhin fest aber auf den Wert  $\alpha$  gesetzt, an dem die Ableitung gebildet wird.  
Partielle Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^\sigma \partial \alpha^\kappa} &= \frac{\partial \lambda_\kappa^\rho}{\partial \alpha^\sigma} J_\rho g(\alpha) + \lambda_\kappa^\rho(\alpha) J_\rho \frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha^\sigma} \\ &= \frac{\partial \lambda_\kappa^\rho}{\partial \alpha^\sigma} J_\rho g(\alpha) + \lambda_\kappa^\rho(\alpha) J_\rho \lambda_\sigma^\tau J_\tau g(\alpha) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Speziell für  $\alpha = \varepsilon = 0$ :

$$\lambda_\kappa^\rho(\varepsilon) \stackrel{(6.21c)}{=} \frac{\partial \varphi^\rho(\alpha, \varepsilon)}{\partial \alpha^\kappa} \Big|_{\alpha=\varepsilon} = \frac{\partial \alpha^\rho}{\partial \alpha^\kappa} = \delta_\kappa^\rho \quad (6.24a)$$

$$g(\varepsilon) = 0 \quad (6.24b)$$

Also insbesondere

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^\sigma \partial \alpha^\kappa} \Big|_{\alpha=\varepsilon} \stackrel{(6.23)}{=} \left( J_\kappa J_\sigma + \frac{\partial \lambda_\kappa^\rho}{\partial \alpha^\sigma}(\varepsilon) J_\rho \right) e \quad (6.25)$$

Da die zweiten Ableitungen vertauschen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^\sigma \partial \alpha^\kappa} \Big|_{\alpha=\varepsilon} - \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^\kappa \partial \alpha^\sigma} \Big|_{\alpha=\varepsilon} &= 0 \\ \stackrel{(6.25)}{=} [J_\kappa, J_\sigma] - \underbrace{\left\{ \frac{\partial \lambda_\sigma^\rho}{\partial \alpha^\kappa} - \frac{\partial \lambda_\kappa^\rho}{\partial \alpha^\sigma} \right\} J_\rho}_{C_{\kappa\sigma}^\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Die Strukturkonstanten lassen sich eindeutig aus den Strukturfunktionen und damit aus der Gruppenstruktur bestimmen.

*Anmerkung:* Das Produkt der Liealgebra (6.17) (der Kommutator) ist nicht assoziativ. Es gilt die Jacobi-Identität

$$[J_\kappa, [J_\sigma, J_\rho]] + [J_\sigma, [J_\rho, J_\kappa]] + [J_\rho, [J_\kappa, J_\sigma]] = 0 \quad (6.27)$$

∞

## 6.2.4 Der umgekehrte Weg: Von der Liealgebra zur Liegruppe

Wir haben gesehen, dass die Liealgebra eindeutig aus der Liegruppe folgt. Gilt das auch umgekehrt?

6.1 **Theorem** (Satz von Cartan) *Sei  $L$  eine  $v$ -dimensionale reelle Liealgebra. Dann gibt es bis auf Isomorphismen genau eine einfach zusammenhängende  $v$ -dimensionale Liegruppe  $G$ , deren Liealgebra  $L$  ist.* ✖

### 6.2.4.1 Bemerkungen

Einfach zusammenhängend heißt: Jeder geschlossene Weg kann stetig zu einem Punkt kontrahiert werden. Viele Liegruppen besitzen dieselbe Liealgebra (z.B.  $U(1)$  und  $\mathbb{R}$  oder  $SU(2)$  und  $SO(3)$ ). Nur eine ist einfach zusammenhängend. Sie heißt universelle Überlagerungsgruppe. Alle anderen Liegruppen mit derselben Liealgebra werden durch die Faktorisierung mit einem diskreten Normalteiler  $H$  gewonnen, z.B.

$$SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2 .$$

### 6.2.4.2 Exponentialabbildung

Den Weg von der Liealgebra zur Liegruppe stellt die Exponentialabbildung her. Dazu betrachtet man das Element

$$M = \alpha^\mu J_\mu \quad (6.28)$$

der Liealgebra. Dann bildet

$$e^{tM} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n M^n = 1 + tM + \frac{1}{2} t^2 M^2 + \dots \quad (6.29)$$

eine eindimensionale Untergruppe der Liegruppe. Jedes Element der Liegruppe ist in einer solchen Untergruppe oder ist das Produkt aus Elementen dieser.

### 6.2.4.3 Beispiel

$\text{SO}(3)$ :  $(L_i)_{jk} = -i\varepsilon_{ijk}$  bilden die Liealgebra. Die Elemente der Liegruppe sind

$$e^{i(\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3)} \quad (6.30)$$

## 6.3 Die Liegruppen $\text{SU}(1)$

Die Liegruppen  $\text{SU}(n)$  haben in der Physik eine herausragende Bedeutung und sollen hier genauer untersucht werden. Sie sind halbeinfach und für solche Gruppen gibt es einen systematischen Weg die Basiszustände der irreduziblen Darstellungen zu finden.

Es gibt für  $g \in \text{SU}(n)$

$$g^\dagger g = 1 \quad (6.31a)$$

$$\det g = 1 \quad (6.31b)$$

Der Parameterbereich ist offensichtlich beschränkt, denn für die Matrixelemente gilt

$$\sum_i |a_{ij}|^2 \stackrel{(6.31a)}{=} 1 \quad (6.32)$$

sind kompakt.

### 6.3.1 Cartan-Weyl-Basis der Liealgebra $\text{SU}(n)$

Unabhängige Parameter:

- ▶ Die Matrizen haben  $2n^2$  reelle Elemente
- ▶ aus (6.31a) folgen  $n^2$  Bedingungen
- ▶ aus (6.31b) folgt eine Bedingung

Es bleiben also  $n^2 - 1$  unabhängige Parameter. Die Dimension des Tangentialraums (der Liealgebra)  $\dim V = n^2 - 1$ .

Die benötigten  $n^2 - 1$  Basisvektoren lassen sich systematisch aufbauen, nämlich:

Es gibt  $n - 1$  untereinander kommutierende Basisvektoren, die sogenannte *Cartan-Unteralgebra*.

$$\{H_l \mid l = 1, \dots, n - 1\}, \quad [H_i, H_j] = 0 \quad (6.33)$$

$$H_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (6.34a)$$

$$H_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (6.34b)$$

$$H_l = C_l \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -l & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (6.34c)$$

$$H_{n-1} = C_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -n + 1 \end{pmatrix} \quad (6.34d)$$

Darüber hinaus kann man die restlichen  $n(n - 1)$  Basisvektoren  $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$  über folgende Kommutatorbeziehungen festlegen.

$$[H_l, E_{ij}] = r_{l,ij} E_{ij}, \quad l = 1, \dots, n - 1; i \neq j = 1, \dots, n \quad (6.35a)$$

$$[E_{ij}, E_{i'j'}] = \delta_{j'} E_{i'j} \quad (6.35b)$$

$$[E_{ij}, E_{ji}] = \text{Linearkombinationen der } H_l \quad (6.35c)$$

Die Relationen (6.35a), (6.35b), (6.35c) legen die  $E_{ij}$  fest, es sind jedoch auch Linearkombinationen von diesen als Liealgebra möglich. Wichtige Wahlen sind:

- sogenannte *Leiteroperatoren* (Bedeutung wird klar in 6.3.3) nach (6.35a), (6.35b), (6.35c) nicht hermitesch

$$(E_{ij})_{mn} = \delta_{im} \delta_{jm}, \quad i \neq j \quad (6.36a)$$

- Hermitesche Matrizen

$$E_{ij}^R = C_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) \quad (6.36b)$$

$$E_{ij}^I = iC_{ij}(E_{ji} - E_{ij}) \quad (6.36c)$$

## 6.3.2 Beispiele

### 6.3.2.1 SU(2)

Hier gilt

$$H_1 \stackrel{(6.34a)}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_z = J_z \quad (6.37a)$$

$$E_{12} \stackrel{(6.36a)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_+ = J_+ \quad (6.37b)$$

$$E_{21} \stackrel{(6.36a)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_- = J_- \quad (6.37c)$$

$$E_{12}^R \stackrel{(6.37b)}{=} \stackrel{(6.37c)}{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_x = \frac{1}{2} (\sigma_+ + \sigma_-) = J_x \quad (6.37d)$$

$$E_{21}^R \stackrel{(6.37b)}{=} \stackrel{(6.37c)}{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_y = \frac{i}{2} (\sigma_- - \sigma_+) = J_y \quad (6.37e)$$

### 6.3.2.2 SU(3)

Hier gibt es  $3 - 1 = 2$  Elemente der Cartan-Unteralgebra

$$H_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.38a)$$

$$H_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.38b)$$

Die weiteren Basiselemente sind

$$E_{12}^R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.39a)$$

$$E_{12}^I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.39b)$$

$$E_{13}^R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.39c)$$

$$E_{13}^I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.39d)$$

$$E_{23}^R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.39e)$$

$$E_{23}^I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (6.39f)$$

Aus (6.36a) würde man mit

$$(H_l)_{mn} = \lambda_l^m \delta_{mn} \quad (6.40)$$

erhalten

$$( [H_l, E_{ij}] )_{mn} = (\lambda_l^i - \lambda_l^j) \underbrace{\delta_{im} \delta_{jn}}_{(6.36a) (E_{ij})_{mn}} = \underbrace{(\lambda_l^i - \lambda_l^j)}_{(6.35a)} (E_{ij})_{mn} \quad (6.41)$$

### 6.3.3 Eigenzustände und Wurzelsystem

#### 6.3.3.1 Eigenzustände der Darstellung

Die Operatoren  $H_l$  aus (6.34a), (6.34b), (6.34c) zeigen, dass es  $n - 1$  kommutierende Observablen geben muss um die Eigenzustände der Lie-Algebra  $SU(n)$  zu definieren. Darüber hinaus findet man  $n - 1$  *Casimir-Operatoren*

$$C_m = \sum_{i_1, j_1, \dots, i_m, j_m}^{n^2 - 1} C_{i_1, j_1}^{j_2} C_{i_2, j_2}^{j_3} \cdots C_{i_m, j_m}^{j_1} J_{i_1} J_{i_2} \cdots J_{i_m}, \quad m = 2, \dots, n \quad (6.42)$$

mit den Strukturkonstanten (6.18). Für die Casimir-Operatoren gilt

$$[C_m, H_l] = [C_m, E_{ij}] = 0 \quad (6.43)$$

- ▶ kommutieren mit allen Elementen der Lie-Algebra

- kein Element der Lie-Algebra kann die Eigenwerte der  $C_m$  ändern
- Nach (6.29) müssen dann die  $C_m$  auch mit allen Elementen der Liegruppe vertauschen und kein Gruppenelement kann die Eigenwerte ändern.

Sinnvolle Erklärung: Die Eigenwerte der  $C_m$  sind für alle Vektoren in einem invarianten Unterraum zu einer irreduziblen Darstellung identisch. Sie definieren die irreduzible Darstellung, das ist sogar eindeutig. Die Eigenwerte  $\omega_l$  der  $H_l$  können sich aber ändern. Sie können zur Wahl der Basis innerhalb eines invarianten Unterraumes herangezogen werden.

### 6.3.3.2 Gewichtsvektoren

Wir benennen unsere Vektoren innerhalb eines invarianten Unterraums

$$|\boldsymbol{\omega}, \mu(\boldsymbol{\omega})\rangle = |\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \mu(\boldsymbol{\omega})\rangle$$

wobei  $\mu(\boldsymbol{\omega})$  der Entartungsindex ist, falls  $\boldsymbol{\omega}$  den Zustand noch nicht eindeutig beschreibt.  $\boldsymbol{\omega}$  heißt Gewichtsvektor.

### 6.3.4 Leiteroperatoren und Wurzelvektoren

Es gibt aufgrund der Wahl als gemeinsame Eigenzustände zu allen  $H_l$

$$H_l |\boldsymbol{\omega}, \mu(\boldsymbol{\omega})\rangle = \omega_l |\boldsymbol{\omega}, \mu(\boldsymbol{\omega})\rangle \quad (6.44a)$$

$$\mathbf{H} |\boldsymbol{\omega}, \mu(\boldsymbol{\omega})\rangle = \boldsymbol{\omega} |\boldsymbol{\omega}, \mu(\boldsymbol{\omega})\rangle \quad (6.44b)$$

mit

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_{n-1} \end{pmatrix} \quad (6.44c)$$

wir lassen  $H_l$  auf  $E_{ij} |\boldsymbol{\omega}, \mu(\boldsymbol{\omega})\rangle$  wirken.

$$H_l E_{ij} |\boldsymbol{\omega}, \mu\rangle \stackrel{(6.35a)}{=} (r_{l,ij} E_{ij} + E_{ij} H_l) |\boldsymbol{\omega}, \mu\rangle = (r_{l,ij} + \omega_l) E_{ij} |\boldsymbol{\omega}, \mu\rangle \quad (6.45)$$

ist Eigenzustand zu  $H_l$  mit Eigenwert  $r_{l,ij}$  falls  $E_{ij} |\boldsymbol{\omega}, \mu\rangle \neq 0$ . Oder anders ausgedrückt

$$E_{ij} |\boldsymbol{\omega}, \mu\rangle = \sum_{\mu'} C_{\mu'} |\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{ij}, \mu'\rangle \quad (6.46)$$

wobei der Wurzelvektor

$$\mathbf{r}_{ij} = \begin{pmatrix} r_{1,ij} \\ \vdots \\ r_{n-1,ij} \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

eingeführt wurde. Dann gibt es  $n(n-1)$  (so viele wie  $E_{ij}$ ). Ohne Entartung gilt

$$E_{ij} |\boldsymbol{\omega}\rangle = |\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{ij}\rangle \quad (6.48)$$

## Bedeutung

6.2 **Theorem** *Jedes Gewichtssystem einer irreduziblen Darstellung von  $SU(n)$  ist ein endliches Untergitter eines  $(n - 1)$ -dimensionalen Wurzelgitters.* ✖

$n - 1$  der  $n(n - 1)$  Wurzelvektoren sind linear unabhängig, sie bilden die Gitterbasis.

Ein Gewichtsvektor heißt positiv, wenn die erste nichtverschwindende Komponente positiv ist.

Der Vektor  $\omega_a$  heißt größer als  $\omega_b$ , wenn  $\omega_a - \omega_b$  positiv ist.

Es gibt ein maximales positives Gewicht (ergibt sich aus ähnlichen Argumenten wie  $|m| \leq l$  beim Drehimpuls) dieses definiert äquivalent zu den Casimir-Operatoren eindeutig die Darstellung.

### 6.3.5 $SU(2)$

Hier ist  $n = 2$ . Es gibt also  $n - 1$  Operatoren in der Cartan-Unteralgebra

$$H_1 \stackrel{(6.37a)}{=} \frac{1}{2} \sigma_z$$

und  $n - 1$  Casimir-Operatoren

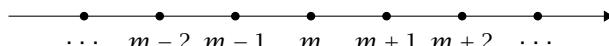
$$\begin{aligned} C_2 &\stackrel{(6.42)}{=} \sum_{i_1, j_1, i_2, j_2=1}^3 \varepsilon_{i_1, j_1, i_2, j_2} \varepsilon_{i_2, j_2, j_1} J_{i_1} J_{i_2} \\ &= - \sum_{i_1, j_1, i_2, j_2=1}^3 \varepsilon_{i_1, j_1, i_2, j_2} \varepsilon_{i_2, j_1, j_2} J_{i_1} J_{i_2} \\ &= \sum_{i_1, i_2=1}^3 \delta_{i_1, i_2} J_{i_1} J_{i_2} \\ &= \sum_{i_1=1}^3 J_{i_1}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \mathbf{J}^2 \end{aligned}$$

Bekanntes Ergebnis aus der Quantenmechanik. Es gibt gemeinsame Eigenzustände zu  $\mathbf{J}^2$  und  $J_z$ . Der Gewichtsvektor enthält den Eigenwert zu  $H_1 = J_z = \sigma_z/2$ , er ist eindimensional, damit ist das auch der einzige linear unabhängige Wurzelvektor.

Man berechnet

$$\begin{aligned} H_1 E_{12} |Jm\rangle &\stackrel{(6.37a)}{=} \frac{1}{2} \sigma_z \sigma_+ |Jm\rangle \\ &= \left( \sigma_+ \frac{1}{2} \sigma_z + \sigma_+ \right) |Jm\rangle \\ &= (E_{12} H_1 + E_{12}) |Jm\rangle = (m + 1) E_{12} |Jm\rangle \\ &\stackrel{(6.35a)}{=} (m + r_{1,12}) |Jm\rangle, \quad r_{1,12} = 1 = -r_{1,21} \end{aligned} \tag{6.49}$$

Damit ist die Form des eindimensionalen Wurzelgitters gegeben.



## Welche Werte sind möglich?

Weitere Bedingungen entstehen durch Forderungen an die Zustandsvektoren  $|Jm\rangle$ . Hier die Normierung des Vektors  $E_{12}|Jm\rangle$ .

$$\begin{aligned}\langle Jm|E_{12}^+E_{12}|Jm\rangle &= \langle Jm|J_-J_+|Jm\rangle = \langle Jm|J^2 - J_z^2 - J_z|Jm\rangle \\ &= (J(J+1) - m^2 - m) \langle Jm|Jm\rangle \geq 0\end{aligned}$$

es folgt

$$J(J+1) - m(m+1) \geq 0 \quad (6.50a)$$

$$J(J+1) - m(m-1) \geq 0 \quad (6.50b)$$

und damit für die extremalen Werte von  $m$

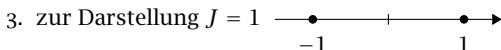
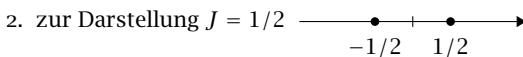
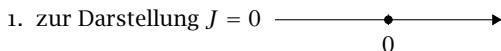
$$\text{aus (6.50a)} \quad m > 0 \quad J(J+1) \geq m(m+1) \rightarrow m_{\max} = J \quad (6.51a)$$

$$\begin{aligned}\text{aus (6.50b)} \quad m < 0 \quad J(J+1) \geq m(m-1) &= -|m|(-|m|-1) = |m|(|m|+1) = J \\ &\rightarrow m_{\min} = -J \quad (6.51b)\end{aligned}$$

Da wegen (6.49)  $-J = m_{\min} = m_{\max} - h = J - k$  mit  $k \in \mathbb{N}$  gelten muss, folgt  $h = 2J$  oder  $J = h/2$ , also

$$J \in \{0, 1/2, 1, 3/2, \dots\} \quad (6.52)$$

Wurzelgitter sind eindeutig gegeben:



Entartungsindex wird nicht benötigt, da alle Zustände eindeutig durch  $|Jm\rangle$  gegeben sind.

## 6.3.6 SU(3)

### 6.3.6.1 Fundamentaldarstellung

Hier ist  $n = 3$ . Es gibt also  $n - 1 = 2$  Operatoren in der Cartan-Unteralgebra, zwei Casimir-Operatoren, zwei linear unabhängige Wurzelvektoren und ein zweidimensionales Wurzelgitter.

Üblicherweise liegen uns die Gruppen  $SU(n)$  bereits in Matrixform vor, siehe z.B. (6.38a), (6.38b), (6.39a), (6.39b). **Fundamentaldarstellung** aus der das Wurzelsystem abgelesen werden kann.



Missing  
figure

► 12 Graphische Darstellung in der Fundamentaldarstellung.

Für SU(3) das Gewichtssystem aus (6.38a), (6.38b)

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (6.53a)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (6.53b)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (6.53c)$$

Wurzelvektoren

$$\boldsymbol{r}_{12} = -\boldsymbol{r}_{21} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)} \stackrel{(6.53a)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.54a)$$

$$\boldsymbol{r}_{23} = -\boldsymbol{r}_{32} = \boldsymbol{\omega}^{(2)} - \boldsymbol{\omega}^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (6.54b)$$

$$\boldsymbol{r}_{31} = -\boldsymbol{r}_{13} = \boldsymbol{\omega}^{(3)} - \boldsymbol{\omega}^{(1)} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (6.54c)$$

Nach (6.43) unabhängig von der gewählten Darstellung. Hat man einen Gewichtsvektor, so folgen daraus alle anderen über zwei Vektoren aus (6.54a), (6.54b), (6.54c).

### 6.3.6.2 Eigenspektrum

Eine Darstellung wird üblicherweise durch die Casimir-Operatoren angegeben. In SU(3) keine sinnvolle physikalische Bedeutung. Man wählt zwei andere Quantenzahlen.

Innerhalb der Darstellung:  $H_1$  und  $H_2$  charakterisieren die Zustände, aber nicht eindeutig. Entartungsindex  $\mu$  wird benötigt.

Zur Bezeichnung der Zustände: Operatoren mit physikalischer Anwendung.

$$I_{\pm} = E_{12}^R \pm iE_{12}^I \quad (6.55a)$$

$$I_3 = H_1 \quad (6.55b)$$

Komponenten des Isospin.

$$U_{\pm} = E_{23}^R \pm iE_{23}^I \quad (6.56a)$$

$$V_{\pm} = E_{13}^R \pm iE_{13}^I \quad (6.56b)$$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}}H_2 \quad (6.56c)$$

Zusätzlich sind für Anwendung noch interessant die abhängigen Operatoren

$$U_3 = \frac{3}{4}Y - \frac{1}{2}I_3$$

$$V_3 = \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}I_3$$

Alle Zustände einer Darstellung (eines Multiplets) erhält man dann in folgender Form:

Der Ausgangszustand ist der Gewichtsvektor mit maximalem positiven Gewicht ( $\omega_1 = i_3$  = Eigenwert von  $I_3$  ist maximal). Das ist

$$\omega_{\max} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{3}}(n_1 + 2n_2) \right) \quad (6.57)$$

Dieser Zustand erfüllt  $V_+ |\omega_{\max}\rangle = U_+ |\omega_{\max}\rangle = 0$ . Alle weiteren folgen durch Anwendung von Kombinationen von  $I_{\pm}$ ,  $V_{\pm}$ ,  $U_{\pm}$ , denn dies sind alles Auf- und Absteigeoperatoren wie die Kommutatorrelationen

$$[x_3, x_{\pm}] = \pm x_{\pm}, \quad x \in \{I, V, U\} \quad (6.58)$$

zeigen. Vgl.  $[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$  für  $SU(2)$ . Gleichung (6.58) zeigt aber auch  $SU(2)$  und damit die Eigenschaften des Spektrums von  $SU(2)$  treten mehrfach auf  $SU(3)$  auf.

Die entarteten Zustände können eindeutig durch

$$I^2 = I_x^2 + I_y^2 + I_z^2 = \frac{1}{2}(I_+I_- + I_-I_+) + I_3^2 \quad (6.59)$$

unterschieden werden.

$$\mu = I^2 \quad (6.60)$$

Also vollständige Beschreibung der Zustände durch

$$|\mathcal{C}, \omega, \mu\rangle = |\underbrace{n_1, n_2}_{\text{aus } C_2, C_3}, \underbrace{I^2}_{\mu}, \underbrace{I_3}_{\omega_1}, \underbrace{Y}_{\omega_2}\rangle \quad (6.61)$$



► 13 Wurzelsystem von SU(3).

# 7

## Anwendungen der Liegruppen

### 7.1 SU(3)-Klassifikation von Quarks, Mesonen und Baryonen

#### 7.1.1 Vorbemerkungen

Historisch: Erste entdeckte Elementarteilchen ließen sich durch ihren *Isospin* klassifizieren, z.B.

► Proton  $p$

► Neutron  $n$

zwei Teilchen nahezu gleicher Masse, die sich in der Ladung unterscheiden.

$$T_{3,p} = \frac{1}{2} \quad (7.1a)$$

$$T_{3,n} = \frac{1}{2} \quad (7.1b)$$

Zusätzlich wichtige Quantenzahl: Baryonenzahl  $B = +1$  für Baryonen,  $B = -1$  für ihre Antiteilchen. Dann Berechnung der Ladung zu

$$Q = \frac{1}{2}B + T_3 \quad (7.2)$$

$$Q_p \stackrel{(7.2)}{\stackrel{=} \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = 1$$

$$Q_n \stackrel{(7.2)}{\stackrel{=} \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 0$$

Zweites Beispiel: Pionen, keine Baryonen, sondern Mesonen, also  $B = 0$

$$\pi^+, T_3 = 1 \rightarrow Q = 1, \quad \pi^0, T_3 = Q \rightarrow Q = 0, \quad \pi^-, T_3 = -1 \rightarrow Q = -1$$

Alle diese Teilchen lassen sich in Multiplets einer SU(2)-Symmetrie anordnen.

$$p, n: \quad T = \frac{1}{2}; T_3 = \pm \frac{1}{2}$$

$$\pi: \quad T = 1; T_3 = -1, 0, 1$$

Es folgte die Entdeckung weiterer Teilchen, die sich nicht einordnen ließen, „seltsam“ verhielten. Notwendigkeit der Einführung einer weiteren Quantenzahl  $S$  Strangeness, die unter der starken Wechselwirkung erhalten ist. Daraus dann

$$Y = B + S \quad (7.3a)$$

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}S + T_3 \quad (7.3b)$$

Diese Teilchen ließen sich durch eine SU(3)-Symmetrie erklären. Die Lagrangefunktion der starken Wechselwirkung muss invariant unter SU(3)-Transformation sein. Auffällig war: Die Teilchen ließen sich alle in Multiplets zu den Darstellungen  $(n_1, n_2)$  anordnen, aber ausgerechnet die einfachsten  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  kamen nicht vor. Warum? Zusätzlich, mit der Entdeckung immer neuer Teilchen wurde alles unübersichtlicher: Zoo der Elementarteilchen.

Ausweg: Postulat von fundamentalen Teilchen, den Quarks, durch Gell-Mann als mathematische Konstrukte. Die Quarks existieren als Zustände aus den irreduziblen Darstellungen  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$ . Alle bekannten Baryonen setzen sich aus irreduziblen Darstellungen der direkten Produkte der Quarks zusammen.

## 7.1.2 Quarkmodell

### 7.1.2.1 Quarks als $(1, 0)$ -Darstellung

Die Darstellung  $(n_1 = 1, n_2 = 0)$  ist die bereits in ?? erwähnte Fundamentaldarstellung. Maximales positives Gewicht (6.57).

$$\omega_{\max} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1/\sqrt{3}} \right)$$

### 7.1.2.2 Physikalisch relevante Quantenzahlen

Aus der Darstellung liest man folgende Quantenzahlen ab:

$$|C, \omega, \mu\rangle \stackrel{(6.61)}{=} \underbrace{|(n_1, n_2),}_{\text{Darstellung}} \underbrace{I^2, I_3,}_{\text{Isospin}} \underbrace{Y}_{\substack{\text{Hyperladung aus (7.3a)}}} \rangle \quad (7.4)$$

Dann:

$$1. \quad Y = \frac{1}{3}, I_3 = \frac{1}{3}$$

$$Q \stackrel{(7.3b)}{=} \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{up-Quark } u = \left| (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle$$

$$2. \quad Y = \frac{1}{3}, I_3 = -\frac{1}{3}$$

$$Q = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{down-Quark } d = \left| (1, 0), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle$$

$$3. \quad Y = -\frac{2}{3}, I_3 = 0$$

$$Q = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{strange-Quark } s = \left| (1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3} \right\rangle$$



► 14 Maximales positives Gewicht.

### 7.1.2.3 Anti-Quarks

Die Antiteilchen zu den Quarks treten in diesem Modell als Zustände aus der  $(0, 1)$ -Darstellung auf. Maximales positives Gewicht:

$$\omega_{\max} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad Y = -\frac{1}{3}, \quad I_3 = -\frac{1}{2}$$

$$Q = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}$$

$$\bar{u} = \left| (0, 1), -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right\rangle$$

$$(2) \quad Y = -\frac{1}{3}, \quad I_3 = \frac{1}{2}$$

$$Q = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\bar{d} = \left| (0, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right\rangle$$

$$(3) \quad Y = \frac{2}{3}, \quad I_3 = 0$$

$$Q = \frac{2}{6} + 0 = \frac{1}{3}$$

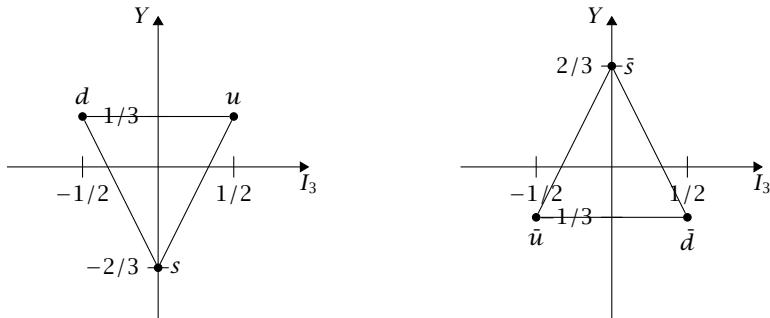
$$\bar{s} = \left| (0, 1), 0, 0, \frac{2}{3} \right\rangle$$

### 7.1.2.4 Zusammenfassung

Wir erhalten drei Quarks und drei Antiquarks aus beiden Fundamentaldarstellungen, siehe Abbildung 15.

$$(n_1 = 1, n_2 = 0) = 3$$

$$(n_1 = 0, n_2 = 1) = \bar{3}$$



► 15 Fundamentaldarstellungen.

### 7.1.3 Mesonen

Mesonen sind aus jeweils einem Quark und einem Antiquark zusammengesetzt. Im Ansatz des Quarkmodells bedeutet das:

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \quad (7.5a)$$

$$(1, 0) \otimes (0, 1) = \underbrace{(0, 0) \oplus (1, 1)}_{\text{irreduzible Darstellungen}} \quad (7.5b)$$

Man findet als ein Singulett  $(0, 0)$ , das ein Meson enthält, das

$$\eta' = |(0, 0), 0, 0, 0\rangle$$

Daneben erhält man ein Oktett. Die Zustände in diesem lassen sich einfach finden, da die Quantenzahlen  $Y$  und  $I_3$  bei Operationen aus  $SU(3)$  erhalten bleiben und das somit auch in direkten Produkten der Fall sein muss. Alle möglichen Summen der Quantenzahlen aus  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  kommen vor.

Diese Zustände sind

$$K^0 = \left| (1, 1), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle, \quad Q = 0$$

$$K^+ = \left| (1, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\rangle, \quad Q = 1$$

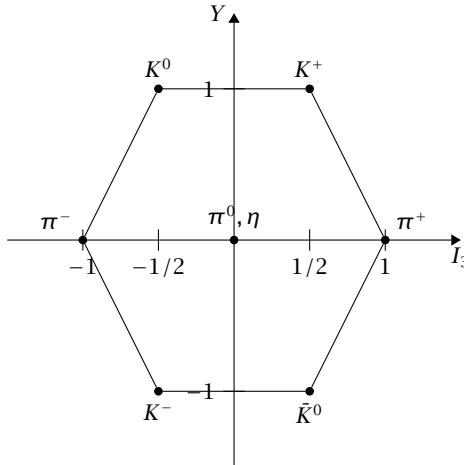
$$\pi^- = |(1, 1), 1, -1, 0\rangle, \quad Q = -1$$

$$\pi^0 = |(1, 1), 1, 0, 0\rangle, \quad Q = 0$$

$$\eta = |(1, 1), 0, 0, 0\rangle, \quad Q = 0$$

$$\pi^+ = |(1, 1), 1, 1, 0\rangle, \quad Q = 1$$

$$K^- = \left| (1, 1), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle, \quad Q = -1$$



► 16 Alle möglichen Summen der Quantenzahlen aus (1,0) und (0,1).

$$\bar{K}^0 = \left| (1, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right\rangle, \quad Q = 0$$

Aus neun möglichen Kombinationen von Quarks  $u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \bar{s}$  erhält man neun Mesonen. Dies sind die sogenannten pseudoskalaren Mesonen. Sie haben keinen Spin, das sich die Paarung  $\uparrow\downarrow$  einstellt (Spin-Singulett). In exakt demselben Diagramm ließen sich die sogenannten Vektormesonen mit der Spin-Paarung  $\uparrow\uparrow$  auftragen (Spin-Triplett mit  $m_s = -1, 0, 1$ ). Sie tragen alle Quantenzahlen wie oben, jedoch einen anderen Spin und sind daher auch energetisch von den pseudoskalaren Mesonen verschieden. Berechnet man explizit die Eigenzustände der Darstellungen, so kann man die Zusammensetzung der Mesonen erhalten.

### ► Beispiel

$$\pi^0 = |(1, 1), 1, 0, 0\rangle$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle \otimes \left| (0, 1), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right\rangle + \left| (1, 0), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle \otimes \left| (0, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u \otimes \bar{u} + d \otimes \bar{d}) \end{aligned}$$



Analogen Vorgehen für Baryonen, aber  $3 \otimes 3 \otimes 3 = \dots$  (Übungen).

## 7.2 Nichtabelsche Eichtheorien

Eichtheorien spielen in der Elementarteilchenphysik eine entscheidende Rolle. Einfaches Beispiel:  $U(1)$ -Eichinvarianz der quantenmechanischen Wellenfunktion.

## 7.2.1 Vorbemerkung: U(1)-Eichtheorie des Elektromagnetismus

### 7.2.1.1 Schrödingergleichung

Schrödingergleichung für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi = \left\{ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\Phi \right\} \psi \quad (7.6)$$

Globale Phasentransformation

$$\psi \rightarrow \psi = e^{i\frac{q}{\hbar}\lambda} \psi \quad (7.7)$$

lässt die Schrödingergleichung invariant. Das gilt nicht für eine lokale Eichtransformation

$$\lambda \rightarrow \lambda(\mathbf{r}, t) \quad (7.8)$$

denn

$$e^{i\frac{q}{\hbar}\lambda(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial}{\partial t} e^{-i\frac{q}{\hbar}\lambda(\mathbf{r}, t)} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{iq}{\hbar} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (7.9a)$$

$$e^{i\frac{q}{\hbar}\lambda(\mathbf{r}, t)} \nabla e^{-i\frac{q}{\hbar}\lambda(\mathbf{r}, t)} = \nabla - \frac{iq}{\hbar} (\nabla \lambda) \quad (7.9b)$$

In der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + iq \left( \Phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) \psi = -\frac{1}{2m} e^{i\frac{q}{\hbar}\lambda(\mathbf{r}, t)} [\hbar \nabla - iq(\mathbf{A} + \nabla \lambda)]^2 \psi \quad (7.10)$$

ist genau dann invariant, wenn

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (7.11a)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \lambda \quad (7.11b)$$

Exakt die Eichtransformation aus der Elektrodynamik, die die Felder

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (7.12a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \dot{\mathbf{A}} \quad (7.12b)$$

$$(7.12c)$$

invariant lässt.

### 7.2.1.2 Dirac-Gleichung

Dirac-Gleichung für Elektronen ( $q = -e$ ) im elektromagnetischen Feld:

$$\left[ \gamma^\mu \left( i\partial_\mu - \frac{e}{\hbar} A_\mu \right) - \frac{mc}{\hbar} \right] \psi = 0 \quad (7.13)$$

mit

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.14a)$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (7.14b)$$

und

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \Phi \\ A \end{pmatrix} \quad (7.14c)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (7.14d)$$

und dem vierkomponentigen Spinor  $\psi$ . Forderung nach einer lokalen Eichtransformation

$$\psi \rightarrow \psi'(x) = e^{i \frac{e}{\hbar} \lambda(x)} \psi(x) \quad (7.15)$$

Einführen der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + i \frac{e}{\hbar} A_\mu \quad (7.16)$$

Die Diracgleichung (7.13) ist genau dann invariant unter der lokalen Eichtransformation (7.15), wenn es die kovariante Ableitung ist

$$D'_\mu \psi' = \left( \partial_\mu + i \frac{e}{\hbar} A'_\mu \right) e^{-i \frac{e}{\hbar} \lambda(x)} \psi(x) \stackrel{(7.11a)(7.11b)}{=} e^{-i \frac{e}{\hbar} \lambda(x)} \left( \partial_\mu + i \frac{e}{\hbar} A_\mu \right) \psi(x) \quad (7.17)$$

### 7.2.1.3 Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik

Das freie Diracfeld (d.h. die Diracgleichung) lässt sich aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_D = i\hbar \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi \quad (7.18)$$

mit dem Dirac-adjungierten Spinor  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  gewinnen, wenn man berechnet mit der Euler-Lagrange-Gleichung für Felder

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \psi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \psi_{r,\mu}} = 0, \quad \psi_{r,\mu} = \frac{\partial \psi_r}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \psi_r \quad (7.19)$$

Nicht invariant unter der lokalen Eichtransformation (7.15). Das gilt auch nicht für die Lagrangedichte des Maxwellfeldes

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (7.20a)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{Faraday-Tensor}) \quad (7.20b)$$

Man kann jedoch ausrechnen, dass die gemeinsamen Phasentransformationen

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\frac{e}{\hbar}\lambda(x)}\psi \quad (7.15)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu \stackrel{(7.11a)(7.11b)}{\substack{\rightarrow \\ (7.14c)(7.14d)}} A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad (7.21)$$

die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= i\hbar\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - ce\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= i\hbar\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (7.22)$$

invariant lassen.

Die mathematische Forderung nach einer lokalen Eichinvarianz der Diracgleichung erzwingt die Ankopplung an das elektromagnetische Feld. Dies hat eine physikalische Konsequenz.

#### 7.2.1.4 Gruppentheoretische Analyse

$$g^{-1} = e^{-iq\lambda} \in U(1)$$

ist also Element einer Liegruppe. Die in (??) auftretenden Ableitungen lauten in Viererschreibweise

$$e^{iq\lambda/\hbar}\partial_\mu e^{-iq\lambda/\hbar} = (\partial_\mu\lambda)e^{iq\lambda/\hbar}\frac{d}{d\lambda}e^{-iq\lambda/\hbar} \quad (7.23)$$

Der Term

$$\frac{d}{d\lambda}e^{-iq\lambda/\hbar} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \quad (7.24)$$

ist Tangentialvektor an  $U(1)$  bei  $e^{-iq\lambda_0/\hbar}$  und

$$e^{iq\lambda/\hbar}\frac{d}{d\lambda}e^{-iq\lambda/\hbar} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{iq}{\hbar}$$

ist „zur 1 zurücktransportierter Tangentialvektor“ und damit ein Element der Liealgebra von  $U(1)$ . Auf Grund der identischen Formen der Phasentransformation der Ableitung (??) und der für die Felder (7.21) ist  $-iqA_\mu/\hbar$  ebenfalls Liealgebra-wertig.

#### 7.2.2 Erweiterung zu einer nichtabelschen Yang-Mills-Eichtheorie

Historisch: Nachdem die elektromagnetische Wechselwirkung sich durch die Forderung nach einer lokalen  $U(1)$ -Eichinvarianz einführen ließ, sucht man nach einer Beschreibung anderer Wechselwirkungen auf dieselbe Art. Für neue Kräfte ist die Ausnutzung neuer Freiheitsgrade notwendig.

Hier exemplarisch: Isospin

$$\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Proton} \quad \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Neutron}$$

Beides sind Fermionen, also korrekte Beschreibung mit Diracspinoren:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\text{prot}} \\ \psi_{\text{neut}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^4 \quad (7.25)$$

Experimentell bekannt: Es gibt Kernreaktionen, die den Nukleonenzustand ändern. Wir suchen also nach einer Beschreibung für Prozesse

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\text{prot}} \\ \psi_{\text{neut}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi'_{\text{prot}} \\ \psi'_{\text{neut}} \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} \psi_{\text{prot}} \\ \psi_{\text{neut}} \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

mit einem  $g \in \text{SU}(2)$ , da normerhaltend.

In einer typischen Lagrangedichte für die freie Dynamik der Felder  $\Psi$  treten Terme der ersten Ableitung  $\partial_\mu \Psi$  auf, vgl. (7.18). Deshalb fordern wir lokale Eichinvarianz. Diese ist erfüllt, wenn sich das für die Ableitungen erfüllen lässt. Aus (7.17) wissen wir, dass es mit einer kovarianten Ableitung funktioniert

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \quad (7.27a)$$

und deren Transformationsverhalten

$$\tilde{D}_\mu = \partial_\mu - iq \left( A_\mu + \frac{i}{q} g^{-1} \partial_\mu g \right) \quad (7.27b)$$

Die Darstellung der Gruppenelemente folgt durch Exponentialabbildung.

$$g^{-1} \partial_\mu g = e^{iM} \partial_\mu e^{-iM} = -i\partial_\mu M + \frac{1}{2!} [M, \partial_\mu M] - \frac{i}{2!} [M, [M, \partial_\mu M]] - \dots \quad (7.28)$$

Für  $\text{SU}(2)$  ist  $M$  eine Linearkombination der Paulimatrizen. Die Entwicklungskoeffizienten müssen die  $x$ -Abhängigkeit tragen ( $x = x^\mu = (t, x, y, z)^\top$ ).

$$M = q\lambda^a S_a, \quad \text{mit } S_a = \frac{\sigma_a}{2} \quad (7.29a)$$

$$\partial_\mu M \stackrel{(7.29a)}{=} q(\partial_\mu \lambda^a) S_a \quad (7.29b)$$

Es folgt:

$$g^{-1}(\partial_\mu g) \stackrel{(7.29a)(7.29b)}{=} -iq((\partial_\mu \lambda^a) + \text{Kommutatorterme}) S_a \in L(\text{SU}(2)) \quad (7.30)$$

Sowohl  $g^{-1}\partial_\mu g$  als auch  $A_\mu$  sind Elemente der Liealgebra zu  $\text{SU}(2)$ . Zu jedem Generator  $S_a$  muss es ein Eichfeld  $A_\mu^a$  geben, also insgesamt drei.

$$A_\mu = A_\mu^a S_a \quad (7.31)$$

Analog zum Feldtensor (7.20b) gibt es auch hier einen für den gilt:

$$\begin{aligned} -iqF_{\mu\nu} &= [D_\mu, D_\nu] = -iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - iq[A_\mu, A_\nu]) \\ &= -iqF_{\mu\nu}^a S_a \end{aligned} \quad (7.32a)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + q\epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + q(A_\mu \times A_\nu)^a \end{aligned} \quad (7.32b)$$

wobei

$$\mathbf{A}_\mu = \begin{pmatrix} A_\mu^1 \\ A_\mu^2 \\ A_\mu^3 \end{pmatrix}$$

Im Vergleich zum Faradaytensor (7.20b) füllt der letzte Term auf Ursprung:

$$A_\mu \in L(\mathrm{SU}(2)) \rightarrow \text{kommutieren nicht}$$

Entscheidende physikalische Konsequenz.

Eine lokal  $\mathrm{SU}(2)$ -invariante Lagrangedichte hat analog (7.22) die Form

$$\mathcal{L} = i\hbar \Psi^\dagger \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{pmatrix} \partial_\mu \Psi - mc^2 \Psi^\dagger \Psi - \frac{1}{q} \sum_a F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

mit  $\Psi^\dagger = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)$ . Der letzte Term enthält nach (7.32b) vierte Potenzen der Felder  $A_\mu$ . Die Bewegungsgleichungen nach (7.19) enthalten somit nichtlineare Terme in  $A_\mu$ .

Bedeutung: Die Felder wechselwirken mit sich selbst. Sie tragen selbst die Ladung an die sie koppeln. Im Unterschied koppeln Photonen an die elektrische Ladung, tragen diese aber nicht.

Bedeutung der Operatoren:  $F_{\mu\nu}^3$  misst den Isospin aus.  $F_{\mu\nu}^\pm = \pm(F_{\mu\nu}^1 \pm iF_{\mu\nu}^2)/\sqrt{2}$  ändert den Isospin.

$\pi^0, \pi^-$  und  $\pi^+$  sind in einer effektiven Theorie in der Lage das zu beschreiben.

Generelle Bezeichnung: Theorien, in denen Vektorfelder zum Erfüllen einer Eichsymmetrie angekoppelt werden heißen Yang-Mills-Theorien. Die Eichfelder heißen Yang-Mills-Felder.

### 7.2.3 Spontane Symmetriebrechung und Englert-Brout-Higgs-Mechanismus

#### 7.2.3.1 Die Masselosigkeit der Yang-Mills-Felder

Die Lagrangedichte (??), insbesondere der Freifeldanteil

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_a F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

ähnelt der des elektromagnetischen Felders (7.20a), teilt insbesondere eine Eigenschaft mit diesem: Die Felder besitzen keine Masse. Musste würden sie besitzen, wenn die Lagrangedichte eine Form ähnlich der aus (7.18) für massive Fermionen hätte.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_a F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - m^2 \sum_a A_\mu^a A^{a\mu} \quad (7.33)$$

Widerspricht der mühevoll einführt und geforderten Eichinvarianz.

Masselose Felder widersprechen aber der Beobachtung, z.B. bei der schwachen Wechselwirkung. Sie ist kurzreichweitig. Kann nur durch massive Austauschteilchen erklärt werden. Die Austauschteilchen müssten wie Photonen bei beliebiger Energie auftreten, tun sie aber nicht.

### 7.2.3.2 Massive Felder durch spontane Symmetriebrechung

Die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) \quad (7.34a)$$

für Dublett

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (7.34b)$$

ist invariant unter globalen  $U(1)$  und  $SU(2)$ -Transformationen.

$$U(1) : (e^{-iq'\lambda} \phi)^\dagger (e^{-iq'\lambda} \phi) = \phi^\dagger e^{iq'\lambda} e^{-iq'\lambda} \phi = \phi^\dagger \phi$$

$$SU(2) : (e^{-iq'\lambda^a S_a} \phi)^\dagger (e^{-iq'\lambda^a S_a} \phi) = \phi^\dagger e^{iq'\lambda^a S_a} e^{-iq'\lambda^a S_a} \phi = \phi^\dagger \phi$$

gilt für jedes  $V(\phi^\dagger \phi)$ . Lokal  $U(1) \otimes SU(2)$ -eichinvariant.

Aus (7.22) und (??) wissen wir, dass die ganze Lagrangedichte lokal  $U(1) \otimes SU(2)$ -eichinvariant wird wenn wir einführen.

$$\mathcal{L} \stackrel{(7.34a)}{\underset{(7.22)(??)}{=}} (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} \mathbf{G}^{\mu\nu} \mathbf{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (7.35a)$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu - iq' B_\mu - iq \sum_a W_\mu^a \quad (7.35b)$$

und den  $SU(2)$ -Eichfeldern

$$W_\mu = W_\mu^a S_a \quad (7.35c)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + q(W_\mu \times W_\nu) \quad (7.35d)$$

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} G_{\mu\nu}^1 \\ G_{\mu\nu}^2 \\ G_{\mu\nu}^3 \end{pmatrix} \quad (7.35e)$$

sowie dem  $U(1)$ -Eichfeld  $B_\mu$  mit

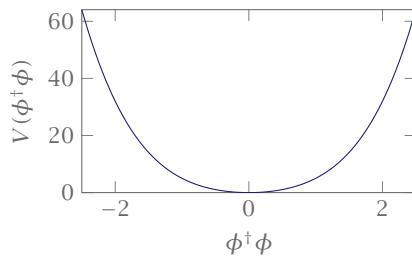
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (7.35f)$$

Als Potential wird angesetzt

$$V(\phi^\dagger \phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (7.36)$$

Fallunterscheidung:

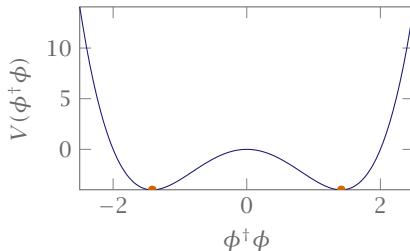
- $\mu^2 > 0$ , Grundzustand bei  $\phi^\dagger \phi = 0$ .



- $\mu^2 < 0$ , Formal  $\mu \in i\mathbb{R}$ , also imaginäre Masse von  $\phi$ , aber kein Problem, da wir die physikalische Bedeutung später anderen Termen zuordnen. Hier nur eine Rechengröße. Grundzustand bei

$$\sqrt{\phi^\dagger \phi} = \frac{v}{2} = \frac{1}{2} \frac{|\mu|}{|\lambda|} \quad (7.37)$$

Dieser Grundzustand ist unendlich entartet, denn jedes  $\phi = (\phi_1, \phi_2)^\top$  mit  $\sqrt{\phi^\dagger \phi} = v/2$  hat dieselbe Energie.



Der Grundzustand bricht die Symmetrie des Potentials, denn diesses ist für jedes  $\sqrt{\phi^\dagger \phi}$  identisch, während der Grundzustand eine spezielle Realisierung aus wählen kann, z.B.

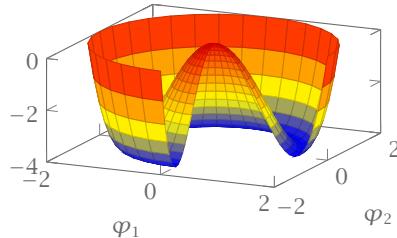
$$\phi_0 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

Dies nennt man spontane Symmetriebrechung.

Wir betrachten nun Anregungen aus dem speziellen Vakuumzustand  $\phi_0$

$$\tilde{\phi} = \phi_0 + \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix} \stackrel{(7.38)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix} \quad (7.39)$$

In (7.39) sind vier Anregungen  $\varphi_1, \dots, \varphi_4$  erkennbar, aber nur, wenn sich  $\sqrt{\phi^\dagger \phi}$  ändert, ist für diese eine Energie notwendig. Beispiel:  $\varphi_3 = \text{const}$ ,  $\varphi_4 = \text{const}$ .



In (7.39) gibt es drei Richtungen in denen der Betrag sich nicht ändert. Das wird sichtbar, wenn man  $\phi$  geeignet schreibt.

$$\tilde{\phi} \stackrel{(7.39)}{=} e^{-i\varepsilon^a(x)S_a} \begin{pmatrix} 0 \\ (v + \varphi(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

Die Lagrangedichte (7.35a) ist  $SU(2)$ -eichinvariant, daher kann man eine spezielle Wahl treffen, ohne etwas an der Physik zu ändern, wähle speziell

$$\phi = e^{i\varepsilon^a(x)S_a} \tilde{\phi} \stackrel{(7.40)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ (\nu + \varphi(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

$\varphi(x)$  ist die einzige Anregung, die physikalisch einen Effekt erzeugt. Sie entspricht einer Anregung, die Energie benötigt. Eingesetzt in die Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\stackrel{(7.35a)}{\stackrel{(7.41)}{=}} \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{4}\mu^2\nu^2\left(1 + \frac{\varphi}{\nu}\right)^2 - \frac{1}{8}\lambda^2\nu^4\left(1 + \frac{\varphi}{\nu}\right)^4 - \frac{1}{4}\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &+ \frac{q^2}{4}W^{a\mu}W_\mu{}^b(\phi^\dagger\sigma^a\sigma^b\phi) + \frac{qq'}{2}W^{a\mu}B_\mu(\phi^\dagger\sigma^a\phi) + \frac{qq'}{2}B^\mu W^a{}_\mu(\phi^\dagger\sigma^a\phi) \\ &+ \frac{q'^2}{2}B^\mu B_\mu(\nu + \varphi)^2 + \dots \quad (7.42) \end{aligned}$$

Diese lassen sich vereinfachen, da

$$\sigma^a\sigma^b + \sigma^b\sigma^a = 0 \quad (7.43a)$$

$$(\sigma^a)^2 = 1 \quad (7.43b)$$

$$\phi^\dagger\sigma^1\phi = \phi^\dagger\sigma^2\phi \stackrel{(7.41)}{=} 0 \quad (7.43c)$$

$$\phi^\dagger\sigma^3\phi \stackrel{(7.41)}{=} -\frac{(\nu + \varphi(x))^2}{2} \quad (7.43d)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\stackrel{(7.42)}{\stackrel{(7.43)(7.37)}{=}} \frac{1}{2}(\partial^\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi) + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\mathbf{G}^{\mu\nu}\mathbf{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{q^2}{8}\nu^2(W^{1\mu}W_\mu{}^1 + W^{2\mu}W_\mu{}^2) \\ &+ \frac{1}{8}\nu^2(qW^{3\mu} - 2q'B_\mu)(qW_\mu{}^3 - 2q'B_\mu) \quad (7.44) \end{aligned}$$

Einzig unschön ist noch, dass die Felder  $B$  und  $W^3$  gekoppelt sind. Das lässt sich jedoch mit neuen Parametern entkoppeln.

$$\begin{aligned} \tan \vartheta_w &= \frac{2q'}{q}, \quad \vartheta_w = \text{Weinberg-Winkel} \\ qW^3{}_\mu - 2q'B_\mu &= \frac{q}{\cos \vartheta_w} \underbrace{(\cos \vartheta_w W^3{}_\mu - \sin \vartheta_w B_\mu)}_{Z_\mu} \quad (7.45a) \end{aligned}$$

mit dem Feld

$$Z_\mu = \cos \vartheta_w W^3{}_\mu - \sin \vartheta_w B_\mu \quad (7.45b)$$

und dem dazu „orthogonalen“ Feld

$$A_\mu = \sin \vartheta_w W^3{}_\mu + \cos \vartheta_w B_\mu \quad (7.45c)$$

Man erhält:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &\stackrel{(7.44)}{\underset{(7.45b)(7.45c)}{=}} \frac{1}{2} [(\partial^\mu \varphi)(\partial_\mu \varphi) + \mu^2 \varphi^2] \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 [(\partial^\mu W^{i\nu} - \partial^\nu W^{i\mu})(\partial_\mu W_{i\nu} - \partial_\nu W_{i\mu}) - \frac{1}{2} q^2 v^2 W^{i\mu} W^i{}_\mu] \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 [(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu)(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) - \frac{1}{2} (q^2 + (2q')^2) v^2 Z^\mu Z_\mu] \\
 &\quad - \frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \text{Terme höherer Ordnung} \quad (7.46)
 \end{aligned}$$

### 7.2.3.3 Physikalische Interpretation

Die Lagrangedichte enthält:

- ▶ ein masseloses Austauschfeld  $A_\mu$
- ▶ zwei Felder  $W^{i\mu}$ ,  $i = 1, 2$  mit der Masse  $qv$
- ▶ ein Feld  $Z^\mu$  mit der Masse  $\sqrt{q^2 + (2q')^2} v$

Damit gelingt es, eine theoretische Beschreibung für die elektromagnetische ( $A^\mu$ ) und die schwache Wechselwirkung ( $W^{1\mu}$ ,  $W^{2\mu}$ ,  $Z^\mu$ ) aufzustellen, die aus einer eichinvarianten Lagrangedichte stammt. Das führt auf das Glashow-Weinberg-Salam-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung. Aber das gelang nur durch das Einführen des massiven Feldes  $\varphi$ .

- ▶ Skalarfeld mit Masse
- ▶ Higgs-Feld
- ▶ Anregung dieses Feldes: Higgs-Boson

Soll das Modell richtig sein, muss das Higgs-Boson gefunden werden. Entdeckung am CERN 2011 und Nobelpreis in Physik 2013 an Englert und Higgs.

### 7.2.4 Die elektroschwache Wechselwirkung für Leptonen

Wir haben gesehen: Forderungen an eine lokale Eichinvarianz erlauben die systematische Einführung von Wechselwirkungsfeldern. Diese Felder können masselos sein oder über den Mechanismus von Englert, Brout und Higgs eine Masse erhalten und trotzdem die Eichinvarianz garantieren. Auf diesen Ansätzen lässt sich das Standardmodell der Elementarteilchenphysik aufbauen. Hier die elektroschwache Wechselwirkung.

### 7.2.4.1 Vorbetrachtung zur Chiralität

Erhaltungsgröße für masselose Fermionen. Dirac-Gleichung für masselose Fermionen

$$(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^j \partial_j) \psi = 0 \quad (7.47a)$$

oder in Komponenten

$$\begin{aligned} i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= -i \begin{pmatrix} 0 & \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})v \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.47b)$$

Ansatz für  $u$

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \tilde{\omega}_1 t)} \\ u_2^0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \tilde{\omega}_2 t)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 u_1^0 \\ \tilde{\omega}_2 u_2^0 \end{pmatrix} &\stackrel{(7.47b)}{=} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.48)$$

Wähle speziell:  $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 u_1^0 \\ \tilde{\omega}_2 u_2^0 \end{pmatrix} \stackrel{(7.47b)}{=} k \sigma^3 \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix} \quad (7.49a)$$

somit

$$\tilde{\omega}_1 = -\tilde{\omega}_2 = k = \omega \quad (7.49b)$$

Damit gibt es zwei Lösungen:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_k e^{i(kz - \omega t)} \quad (7.50a)$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_k e^{-i(kz + \omega t)} \quad (7.50b)$$

Der Spin ist immer parallel zur Ausbreitungsrichtung. Solche Teilchen nennt man rechts-händig. Für  $v$  findet man genau das gegenteilige (linkshändig). Für massebehaftete Teilchen sind das keine Eigenzustände des Hamiltonoperators mehr, trotzdem lassen sich die Teilchen danach sortieren. Zugehörige Projektoren:

$$P_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \quad (7.51a)$$

$$P_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \quad (7.51b)$$

mit

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.51c)$$

### 7.2.4.2 Spinoren in der elektroschwachen Wechselwirkung

Man findet experimentell:

- ▶ Es gibt drei Generationen von Leptonen
  1.  $e, \nu_e$
  2.  $\mu, \nu_\mu$
  3.  $\tau, \nu_\tau$
- ▶ Neutrinos kommen nur linkshändig vor. Daher führt man ein: Den rechtshändigen Teil des Elektrons als Singulett  $e_R \in \mathbb{C}_R^4$  (Dirac-Spinor), und das Dublett für den linkshändigen Anteil des Elektrons und das Neutrino  $(\nu_L, e_L)^\dagger = L \in \mathbb{C}_L^4 \otimes \mathbb{C}_2$ . Analog für die zweite und dritte Generation.

### 7.2.4.3 Wechselwirkungen

Der rechtshändige Teil des Elektrons kann nicht mit Neutrinos koppeln, das tut aber der linkshändige Teil. Das legt folgende Form der Lagrangedichte nahe.

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \bar{L} i \gamma^\mu D_\mu L + \bar{e}_R i \gamma^\mu D_\mu e_R \quad (7.52a)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{int}} + \underbrace{\mathcal{L}_H}_{\text{Higgsanteil}} + \underbrace{\mathcal{L}_0}_{\text{Freifeldanteil}} \quad (7.52b)$$

$$D_\mu L = \left( \partial_\mu + i q \sum_l \frac{r^l}{2} W^l_\mu + i q' \frac{1}{2} B_\mu \right) L \quad (7.52c)$$

$$D_\mu e_R = \left( \partial_\mu + i q' \frac{1}{2} B_\mu \right) e_R \quad (7.52d)$$

$L$  ist  $SU(2) \otimes U(1)$ -eichinvariant,  $e_R$  ist als Singulett nur  $U(1)$ -eichinvariant.

Sortieren analog zu Abschnitt ??.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & -\frac{q}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L) W_\mu^+ - \frac{q}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L) W_\mu^- \\ & - \frac{1}{2} \frac{q}{\cos \theta_w} \left[ (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) - q(1 - 2 \sin^2 \theta_w) \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + 2q \sin^2 \theta_w (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \right] Z^\mu \\ & + g \sin^2 \theta_w (\bar{e} \gamma^\mu e) A_\mu + \text{Ableitungen} \end{aligned} \quad (7.53a)$$

wobei die erste Zeile der geladene Strom, die zweite Zeile der neutrale Strom und die dritte Zeile der elektromagnetische Strom ist mit

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2) \quad (7.53b)$$

$$Z_\mu = \cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B_\mu \quad (7.53c)$$

$$A_\mu = \sin \theta_w W_\mu^3 + \cos \theta_w B_\mu \quad (7.53d)$$

Der neutrale Strom war vor der Theorie nicht bekannt, wurde postuliert und später gefunden.

### 7.2.4.4 Masse des Elektrons

Experimentell bekannt: Das Neutrino ( $m_\nu \ll 1$  eV) ist wesentlich leichter als das Elektron ( $m_e \approx 511$  keV). Das bricht die Symmetrie des Dubletts ( $\nu_L, e_L$ ). Ursprünglich wurde das Neutrino als masselos angenommen. Eichinvariante Weg dem Elektron seine Masse zu geben: Kopplung an das Higgs-Feld, Yukawa-Kopplungsterm

$$\mathcal{L}_Y = -q_e \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{e} e \left( 1 + \frac{\varphi}{v} \right) \quad (7.54)$$

Damit ist die gesamte Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_H + \sum_{i \in \{e, \mu, \tau\}} (\mathcal{L}_{Y,i} + \mathcal{L}_{\text{int},i}) \quad (7.55)$$

### 7.2.5 Starke Wechselwirkung

Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen heißen Hadronen. Sie sind zusammengesetzt aus Quarks, vgl. ???. Aus Experimenten ist bekannt, dass es sechs Quarks gibt.

- ▶ 1. Generation:  $u$  (up),  $d$  (down)
- ▶ 2. Generation:  $c$  (charm),  $s$  (strange)
- ▶ 3. Generation:  $t$  (top),  $b$  (bottom)

Ebenfalls experimentell bekannt ist die  $\Delta^{++}$ -Resonanz, welche aus drei up-Quarks besteht und Spin 3/2 hat, d.h.  $m_{s,\text{Quark}} = +1/2$ .

Alle Quantenzahlen sind identisch. Dies ist ein Widerspruch zu Fermionen und eine weitere Quantenzahl ist notwendig, der Farbfreiheitsgrad mit drei verschiedenen Werten (rot, grün, blau).

Die starke Wechselwirkung muss an den Farbfreiheitsgrad ansetzen, da auch die  $\Delta^{++}$ -Resonanz betroffen ist. In der Quantenchromodynamik ist die Farbe die Ladung. Ansatz über lokale Eichinvarianz aus SU(3).

Zustandsraum eines Quarks

$$\psi_{\alpha,f,c} \in \underbrace{\mathbb{C}^4}_{\text{Dirac-Spinor}, \alpha} \otimes \underbrace{\mathbb{C}^6}_{\text{Flavor}, f} \otimes \underbrace{\mathbb{C}^3}_{\text{Farbe}, c}$$

Eine lokal eichinvariante Lagrangedichte lässt sich dann einführen nach dem Muster.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{10\pi} G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu + m_f) \psi_f \quad (7.56a)$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu - iq_c G_\mu \quad (7.56b)$$

$$G_\mu = \frac{1}{2} \lambda_a G^a_\mu \quad (7.56c)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu - iq_c [G_\mu, G_\nu] \quad (7.56d)$$

$$Q_a = \frac{1}{2} \lambda_a = \text{SU}(3)\text{-Generatoren} \quad (7.56e)$$

Es gibt acht SU(3)-Generatoren, übliche Darstellung durch Gell-Mann-Matrizen, vgl. (??) und (??).

Daraus folgt, es gibt acht Austauschfelder, in der Quantisierung acht Austauschteilchen, die Gluonen.

Experimentell findet man, dass nur der Farb-Singulett-Zustand realisiert wird. Teilchen sind farbneutral.

Die schwache Wechselwirkung koppelt ebenfalls an die Quarks und ändert den Flavourfreiheitsgrad. Auch hier koppelt wieder nur der linkshändige Anteil.

## 7.2.6 Zusammenfassung zum Standardmodell

Das Standardmodell besteht aus

- ▶ Fermionen: Leptonen oder Quarks
- ▶ Bosonen: Austauschfelder

Die Austauschfelder werden aus lokalen Eichinvarianz-Forderungen in einer Eichtheorie der Form

$$\underbrace{\text{U}(1) \otimes \text{SU}(2)}_{\text{elektroschwache WW}} \otimes \underbrace{\text{SU}(3)}_{\text{Quantenchromodynamik}}$$

gewonnen.

## 7.2.7 Und darüber hinaus?

Es gibt ungeklärte Fragen.

Beispiel 1: Große Vereinheitlichung. Die asymptotische Erwartung besagt, dass bei hohen Energien die Wechselwirkungen ununterscheidbar sein. Die höhere Symmetrie benötigt eine neue Gruppe.

$$D|_{\text{U}(1) \otimes \text{SU}(2) \otimes \text{SU}(3)}$$

Notwendig ist, dass  $\text{U}(1) \otimes \text{SU}(2) \otimes \text{SU}(3)$  als Untergruppen enthalten sein müssen. Bei Einschränkungen der Symmetrien muss eine Darstellung der höheren Gruppe existieren, die sich auf die verwendeten Darstellungen der einzelnen Wechselwirkung aufteilen lässt. Modelle dafür sind  $\text{SU}(5)$  und  $\text{SO}(10)$ .

Beispiel 2: Gravitation lässt sich in dieser Form nicht einbinden. Das fundamentale Problem ist, dass die Symmetrie der Einsteinschen Feldgleichungen  $\text{GL}(4)$  ist. Diese hat keine endlichdimensionale Darstellung. Es können also keine endlichdimensionalen Spinoren  $\psi$  für die Felder gefunden werden.

# Index

## — Sonstige —

Äquivalenzklasse, 11  
äquivalent, 36  
äquivalent modulo, 11

## — A —

Automorphismengruppe, 9  
Automorphismus, 8

## — B —

Bahn, 13  
Bild, 7

## — C —

Cartan-Unteralgebra, 74  
Casimir-Operatoren, 76

## — D —

Darstellung, 2  
Dimension der Gruppe, 68  
direkte Produkt, 17

## — E —

einfach, 15  
endliche Punktgruppe, 31  
endliche Raumgruppe, 31  
Endomorphismus, 8  
Epimorphismus, 8

## — F —

Faktorgruppe, 14  
Faktormenge, 12  
Fundamentaldarstellung, 79

## — G —

Gruppe, 1  
Gruppe der inneren Automorphismen, 16

## — H —

halbeinfach, 15

Homomorphismus, 7

## — I —

invariant, 38  
invariante Untergruppe, 14  
invarianter Unterraum, 2f.  
invariantes Maß, 37  
irreduzibel, 38  
irreduziblen Tensoroperatoren, 61  
isomorph, 2  
Isomorphismus, 8  
Isospin, 83

## — K —

Kern, 7  
Klassenprodukt, 17  
kongruent, 30  
Konjugationsklasse, 16

## — L —

Leiteroperatoren, 75  
lineare Darstellung, 10  
Linkstranslation, 13  
linkstransportierte Vektor, 70

## — M —

Monomorphismus, 8

## — N —

nicht, 14  
Normalisator, 16  
Normalteiler, 14

## — O —

Orbit, 13  
Ordnung, 12

## — P —

Projektion, 12

— R —

- Rechtsnebenklasse, 12
- reduzibel, 38
- reduziertes Matrixelement, 64
- reguläre Rechtsdarstellung, 44
- Repräsentant, 11

— S —

- selbstkonjugiert, 16
- semidirektes Produkt, 19
- Spur, 42
- Strukturfunktion, 68
- Strukturkonstanten, 71

— T —

- transitiv, 13
- treu, 35

— U —

- Untergruppe, 6
- Untergruppenkriterium, 6

— V —

- vollreduzibel, 38
- vollständig reduzierbar, 38

— W —

- Wigner-Eckart-Theorem, 64
- Wirkung, 9

— Z —

- Zentralisator, 16
- Zentrum, 16

# Literatur

- [1] M. Hamermesh. *Group Theory and its Application to Physical Problems*. Addison-Wesley, 1964.
- [2] M. Tinkham. *Group Theory and Quantum Mechanics*. Dover Publications Inc., 2003.
- [3] W. Miller Jr. *Symmetry Groups and their Applications*. Academic Press, 1972.
- [4] W. Ludwig und C. Falter. *Symmetries in Physics*. Springer, 1988.
- [5] R. Gilmore. *Lie groups, Lie algebras and some of their applications*. Wiley, 1974.
- [6] M. Böhm. *Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik*. Springer, 2011.
- [7] B. C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. 2. Aufl. Springer, 2015.
- [8] U. Mosel. *Fields, Symmetries, and Quarks*. 2. Aufl. Springer, 1999.