

Dr. Holger Cartarius, Universität Stuttgart

Einführung in relativistische Quantenfeldtheorien

Stuttgart, Wintersemester 2014 / 2015

Revision: 19. April 2015

Für Hinweise auf Druckfehler und Kommentare jeder Art bin ich dankbar.¹

¹Henri Menke, henrimenke@gmail.com

Übertragung in L^AT_EX durch Henri Menke, Michael Schmid, Marcel Klett und Jan Schnabel.

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ Namensnennung - Nicht-kommerziell - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

Inhaltsverzeichnis

1 Kurze Einführung in die relativistische Quantenmechanik	1
1.1 Grundlagen der SRT	1
1.1.1 Experimentelle Tatsachen und Konsequenzen	1
1.1.2 Geeignete Notation	2
1.1.3 Lorentztransformation	3
1.1.4 Relativistische Kinematik	3
1.2 Die Klein-Gordon-Gleichung	5
1.3 Die Dirac-Gleichung	6
1.3.1 Kontinuitätsgleichung	9
1.3.2 Ruhende Teilchen	10
1.3.3 Bedeutung der Zustände negativer Energie	11
1.3.4 Im elektromagnetischen Feld	12
2 Felder und deren Quantisierung	13
2.1 Ein Beispiel aus der Mechanik	13
2.2 Lagrangeformalismus für allgemeine Felder	15
2.3 Feldquantisierung	17
2.3.1 Zurück zum mechanischen Beispiel	17
2.3.2 Verallgemeinerung	19
2.4 Symmetrien und Erhaltungssätze	19
3 Quantisierung freier relativistischer Felder	21
3.1 Klein-Gordon-Feld	21
3.1.1 Motivation der Herangehensweise	21
3.1.2 Kanonische Variablen	21
3.1.3 Quantisierung der Klein-Gordon-Gleichung	23
3.1.4 Eigenzustände des Hamiltonoperators und deren Interpretation	24
3.2 Das Dirac-Feld	28
3.2.1 Kanonische Variablen	28
3.2.2 Quantisierung	30
3.3 Maxwell-Feld	32
3.3.1 Maxwell-Gleichungen und Eichfreiheit	32
3.3.2 Kanonische Variablen	33
3.3.3 Quantisierung	33
4 Behandlung von Wechselwirkungen	35
4.1 Motivation	35
4.1.1 Geladenen Fermionen	35
4.1.2 Lagrangedichten für Wechselwirkungen	35
4.1.3 Modellpotential	36
4.2 Formalismus zur Behandlung von Wechselwirkungen	36
4.2.1 Zeitentwicklung und Wechselwirkungsbild	37
4.2.2 Störungsrechnung	38

4.2.3	Die Streumatrix	39
4.2.4	Wicksches Theorem	41
4.3	Propagatoren	42
4.3.1	Feynman-Propagator für das Klein-Gordon-Feld	43
4.3.2	Dirac- und Maxwellfeld	45
5	Quantenelektrodynamik	47
5.1	Wechselwirkungsterm	47
5.1.1	Streumatrix	47
5.1.2	Rechtfertigung der Störungsreihe	48
5.2	Feynman-Diagramme	48
5.3	Ein Prozess erster Ordnung	50
5.3.1	Beitrag zur Streumatrix	50
5.3.2	Verschwinden der Matrixelemente	51
5.3.3	Externe elektromagnetische Felder	52
5.4	Feynman-Regeln	52
5.5	Ausgewählte Prozesse 2. Ordnung	54
5.5.1	Streumatrix 2. Ordnung	54
5.5.2	Vorkommende Prozesse	54
5.5.3	Elektron-Elektron-Streuung (Møller-Streuung)	55
5.6	Wirkungsquerschnitte	57
5.7	Korrekturen höherer Ordnung	58
5.7.1	Divergenzen	58
5.7.2	Problemloses Beispiel: Photon-Photon-Streuung	59
5.7.3	Verbleibende divergente Terme	60
5.8	Ideenskizze zur Regularisierung und Renormierung	60
5.8.1	Ansätze zur Regularisierung	60
5.8.2	Konvergente Matrixelemente durch Renormierung	62
5.8.3	Anmerkungen	63
5.9	Folgen der Korrekturen in der Quantenelektrodynamik	64
6	Kovariante Eichtheorien	65
6.1	Bereits bekanntes Beispiel	65
6.2	Weiterentwicklung	65
6.2.1	Grundlegender Gedanke	65
6.2.2	Beispiele	66

Literatur

- [1] J. Bjorken und S. Drell. *Relativistische Quantenfeldtheorie*. BI-Hochschul Taschenbücher. Bibliographisches Institut, 1967. ISBN: 978-3-860-25596-4.
- [2] F. Mandl, G. Shaw und R. Bönisch. *Quantenfeldtheorie*. Aula-Verlag GmbH, 1993. ISBN: 978-3-891-04532-9.
- [3] U. Mosel. *Fields, Symmetries, and Quarks*. Texts and monographs in physics. Springer, 1999. ISBN: 978-3-540-65235-9.
- [4] F. Schwabl. *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2005. ISBN: 978-3-540-25904-6.

I Kurze Einführung in die relativistische Quantenmechanik

1.1 Grundlagen der SRT

1.1.1 Experimentelle Tatsachen und Konsequenzen

Experimente zeigen, dass die Lichtgeschwindigkeit endlich ist und in jedem Inertialsystem zum gleichen Wert gemessen wird. Dies widerspricht jedoch der Galileitransformation, denn nach dieser berechnet sich im Falle zweier zueinander bewegter Koordinatensysteme (siehe Abbildung 1)

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a} - \mathbf{u}t, \quad (1.1a)$$

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{u}. \quad (1.1b)$$

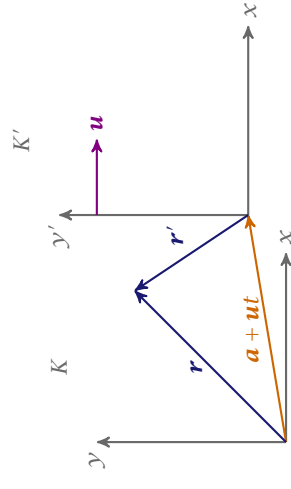
Auch die elektromagnetischen Felder transformieren sich nicht nach der Galileitransformation, sondern nach der Lorentztransformation, andernfalls müssten in jedem Inertialsystem die Maxwellgleichungen anders lauten.

Einstein, 1905: Anwendung der Lorentztransformation auf die Mechanik gibt die richtige Physik wieder.

Für das genannte Beispiel lautet die Lorentztransformation

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right), \quad (1.2a)$$

$$x' = -\gamma\beta ct + \gamma x, \quad (1.2b)$$



► 1 Galileitransformation von Inertialsystem K nach K'. Das Inertialsystem K' bewege sich mit $\mathbf{u} = u_0 \mathbf{e}_x$ relativ zu K.

wobei

$$\beta = \frac{u}{c}, \quad (1.2c)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (1.2d)$$

Es zeigt sich, dass sowohl die Zeit als auch der Ort transformiert werden müssen.

1.1.2 Geeignete Notation

Da die Zeit kein geeigneter Bahnparameter ist, fassen wir diese mit dem Ort zu einem *Vierervektor* zusammen

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Dabei gilt meist:

- ▶ griechische Indizes zählen von $0 \dots 3$,
- ▶ lateinische Indizes zählen von $1 \dots 3$.

Ein *kontravarianter Vektor* wird durch x^μ beschreiben. Das zugehörige Element im Dualraum, der *kovariante Vektor* wird mit x_μ bezeichnet.

Die Metrik der SRT ist

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Mit ihr wechselt man von kontra- zu kovarianten Komponenten und vice versa,

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{und} \quad x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu. \quad (1.5)$$

Für das Skalarprodukt gilt in dieser Schreibweise

$$\begin{aligned} x_\mu x^\mu &= x_\mu \eta^{\mu\nu} x_\nu \\ &= x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu \\ &= x^0 x^0 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Index

- A —
 - Austauschstreuerung, 56
- D —
 - differentielle Wirkungsquerschnitt, 57
 - Dimensionsmäßige Regularisierung, 61
 - Dirac-Gleichung, 29
 - Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen, 9
 - direkte Streuung, 56
- E —
 - Eigenzeit, 4
- F —
 - Feynman-Dagger Symbols, 9
- H —
 - Hamiltondichte, 16
 - Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, 17
 - Heisenbergbild, 37
- K —
 - kanonische Quantisierung, 19
 - Klein-Gordon-Feld, 22
 - Klein-Gordon-Gleichung, 5
 - Kontinuitätsgleichung, 10
 - Kontraktion, 41
 - kontravarianter Vektor, 2
 - kovariante Vektor, 2
- L —
 - Lagrangedichte, 14
 - Lamb-Verschiebung, 64
 - Lorentzskalar, 3
- M —
 - Majorana-Teilchen, 27
- N —
 - Noether-Theorem, 19
 - Normalordnung, 26
- P —
 - Paarbildung, 11
 - Pauli-Gleichung, 8
 - Pauli-Villars-Regularisierung, 61
- R —
 - relativistische Energie-Impuls Beziehung, 5
- S —
 - Strahlungsgleichung, 32
 - Streuamatrix, 40
 - supernormierbar, 64
- U —
 - Ultraviolettdivergenz, 59
- V —
 - Viererimpuls, 4
 - Vierervektor, 2
 - virtuelle Photonen, 57
- W —
 - Wechselwirkungsbild, 37
 - Wicksche Theorem, 42
- Y —
 - Yang-Mills-Theorie, 66
- Z —
 - Zeitordnungsoperator, 38
 - zweiten Quantisierung, 21

6.2.2 Beispiele

Den ersten Ansatz einer nichtabelschen Eichtheorie beschreibt die *Yang-Mills-Theorie* aus dem Jahre 1954. Diese fordert eine $SU(2)$ -Eichinvarianz für ein Isospin-Feld, welches bereits eine globale $SU(2)$ -Symmetrie besitzt.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (6.5a)$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-\sum_{i=1}^3 \frac{g}{2} \theta_i(x)} \Phi(x) \quad (6.5b)$$

mit den Generatoren $\sigma_i/2$ der 2×2 -Darstellung von $SU(2)$. Dies erfordert entsprechend die Existenz von drei Feldern W_{μ}^k , sodass

$$W_{\mu}^k \rightarrow W_{\mu}^{\prime k} = W_{\mu}^k - \frac{1}{g} \partial_{\mu} \Theta^k(x) + \sum_{l,m} \varepsilon_{klm} \Theta_l(x) W_{\mu}^m \quad (6.6)$$

und

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -g \sum_{k=1}^3 \bar{\psi} \gamma^{\mu} \sigma_k W_{\mu}^k \psi \quad (6.7a)$$

oder

$$\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} + \frac{i}{\hbar} g \sum_{k=1}^3 \sigma_k W_{\mu}^k \quad (6.7b)$$

gilt. Auch hier lässt sich eine Lagrangedichte finden,

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} \sum_k G_{\mu\nu}^k G^{k\mu\nu}, \quad (6.8a)$$

$$G_{\mu\nu}^k = \partial_{\nu} W_{\mu}^k - \partial_{\mu} W_{\nu}^k - g \sum_{l,m} \varepsilon^{klm} W_{\mu}^l W_{\nu}^m. \quad (6.8b)$$

Dieser Ansatz war ursprünglich dafür gedacht, die starke Wechselwirkung des Isospin-Feldes (6.5) beschreiben zu können, was jedoch nicht gelang. Aber eine $SU(2)$ -Eichforderung führte auf die Austauschfelder der schwachen Wechselwirkung mit den drei Feldern W_{μ}^k , was auf die drei bosonische Austauschteilchen W^+ , W^- , Z^0 führt. Analog gelingt das Finden der 8 unabhängigen Gluonen mit den 8 notwendigen Erzeugenden der $SU(3)$.

1.1.3 Lorentztransformation

Das vorherige Beispiel aus den Gleichungen (1.1a) bis (1.1b) lautet in der Vierer-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_x} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Die Lorentztransformationen bilden ein Gruppe. In der Matrixschreibweise erfüllen sie

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (1.8a)$$

$$\Lambda_{\rho}^{\mu} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \quad (1.8b)$$

mit

$$\Lambda_{\rho}^{\mu} = (\Lambda_{\rho}^{\mu})^T.$$

Ein Vektor oder Lorentzvektor transformiert sich nach einer Lorentztransformation

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (1.9)$$

Bei Tensoren höherer Stufe transformiert sich jeder Index nach der Form (1.9)

$$A'^{\alpha\beta\gamma}_{\delta\epsilon} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \Lambda^{\gamma}_{\xi} \Lambda^{\delta}_{\sigma} \Lambda^{\epsilon}_{\tau} A^{\mu\nu\xi}_{\sigma\tau}. \quad (1.10)$$

Eine invariante skalare Größe unter Lorentztransformation wird als *Lorentzskalar* bezeichnet, der zum Beispiel aus der Kontraktion zweier Vektoren gebildet werden kann,

$$\begin{aligned} x'^{\mu} x'_{\mu} &= x'^{\mu} \eta_{\mu\nu} x'^{\nu} \\ &\stackrel{(1.9)}{=} \Lambda^{\mu}_{\rho} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\sigma} x^{\rho} x^{\sigma} \\ &\stackrel{(1.8b)}{=} \eta_{\rho\sigma} x^{\rho} x^{\sigma} \\ &= x^{\rho} x_{\rho}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.1.4 Relativistische Kinematik

Ein wichtiger Lorentzskalar ist das Längenelement mit dem man die Abstände zwischen zwei Punkten der Raumzeit misst,

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\tau^2 = dx^{\mu} dx_{\mu} \\ &= c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 \\ &= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Daraus folgt, dass τ invariant unter Lorentztransformation ist (Lorentzskalar).

In einem Koordinatensystem, in dem man sich selbst nicht bewegt ($dx^i = 0$) gilt

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2,$$

Die Variable τ hat hier die Bedeutung der Zeit. Sie wird daher als *Eigenzeit* bezeichnet.

In diesen Zusammenhang stellt sich die Frage nach einer sinnvollen Definition einer Geschwindigkeit. Diese sollte die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- ▶ Sie sollte ein Vierervektor sein.
- ▶ Ableitungen von x^μ nach t kommen nicht in Frage, diese sind keine Lorentzskalare.
- ▶ Eine Ableitung nach τ ist jedoch möglich:

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{d}{d\tau} x^\mu = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \end{pmatrix} = \frac{dt}{d\tau} \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.13a)$$

Mit

$$\begin{aligned} c^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 &\stackrel{(1.12)}{=} c^2 - \mathbf{r}'^2 = c^2 - \mathbf{v}^2, \\ \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 &= 1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2, \\ \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} &= \gamma, & (1.13b) \\ \Rightarrow u^\mu &= \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. & (1.13c) \end{aligned}$$

Damit sind wir in der Lage, einen *Vierereimpuls* zu identifizieren,

$$p^\mu = m u^\mu = m \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \gamma c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Hierbei haben wir $\mathbf{p} = m \gamma \mathbf{v}$ für den räumlichen Anteil verwendet. Betrachten wir nur die nullte Komponente, d.h.

$$\begin{aligned} p^0 &= m \gamma c \\ p^0 c &= m \gamma c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m c^2 + \frac{m v^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Die Entwicklung in eine Taylorreihe zeigt, dass wir die Ruheenergie, die kinetische Energie eines Teilchens und relativistische Korrekturen erhalten. Somit ergibt sich eine sinnvolle Definition der Energie. Man interpretiert entsprechend

$$p^0 = \frac{E}{c} \quad (1.15)$$

6 Kovariante Eichtheorien

6.1 Bereits bekanntes Beispiel

In den Übungen (Aufgabe 7) wurde gefunden, dass die Forderung nach einer lokalen Eichvarianz der Dirac-Gleichung,

$$\underline{\psi} \rightarrow \underline{\psi}' = e^{i\theta(x)} \underline{\psi}, \quad (6.1)$$

nur erfüllt werden kann, wenn man

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{\hbar} q A_\mu \quad (6.2)$$

ersetzt, wobei die zusätzlichen Fiedler A_μ selbst wieder einer zu (6.1) passenden Eichtransformation unterliegen müssen,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{\hbar}{q} \partial_\mu \theta(x). \quad (6.3)$$

Verlangt man, dass es noch einen freien Feldanteil für die Felder A_μ gibt, der dieselbe Form wie $\underline{\psi}$ in der Lagrangedichte hat und für sich allein invariant unter (6.3) ist, so erhält man die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = i \hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{i}{\hbar} q A_\mu \right) \underline{\psi} - m c^2 \bar{\psi} \underline{\psi} - \frac{1}{2\mu_0} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu). \quad (6.4)$$

Diese Lagrangedichte ist invariant unter den gemeinsamen Eichtransformationen (6.3) und (6.4). Die Forderung nach einer lokalen Eichinvarianz des Dirac-Feldes führt auf die Kopplung an das elektromagnetische Feld, denn das bisher vorgestellte Vorgehen mit dem Ergebnis (6.4) führt exakt auf die Lagrangedichte (4.4).

6.2 Weiterentwicklung

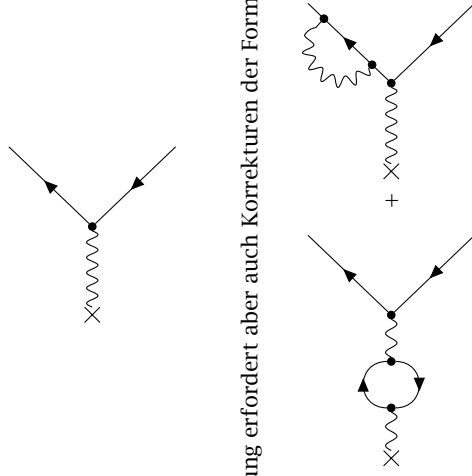
6.2.1 Grundlegender Gedanke

Die Forderung nach einer lokalen Eichinvarianz ist erfolgreich und führt auf das bekannte Ergebnis aus der klassischen Theorie (minimale Ankopplung). Doch was ist mit Fällen, in denen wir uns nicht an einer vorhandenen klassischen Theorie orientieren können? Ein Versuch wäre es, weitere (kompliziertere) lokale Eichinvarianzen zu fordern.

berücksichtigen. Auch das gelingt mit (5.35) und (5.36b). In der Quantenelektrodynamik tritt nur eine endliche Anzahl an primitiv divergenten Graphen auf. Eine solche Theorie nennt man renormierbar. Es gibt jedoch auch nicht renormierbare Theorien, in denen jede Ordnung neue Divergenzen hervorbringt. Treten in einer gesamten Theorie nur eine endliche Anzahl divergenter Graphen auf, so nennt man sie *superrenormierbar*.

5-9 Folgen der Korrekturen in der Quantenelektrodynamik

Trotz ihrer problematischen mathematischen Behandlung sind die Korrekturterme wichtig und ihre Auswertung im Sinn von (5.37) führt auf eine hervorragende Übereinstimmung mit Experimenten. Wichtige Beispiele hierfür sind die Wechselwirkung eines Elektrons mit einem äußeren Magnetfeld:



Die korrekte Berechnung erfordert aber auch Korrekturen der Form

woraus das anomale magnetische Moment des Elektrons bestimmt werden kann. Mit Termen aus der Ordnung α^2 und α^3 lässt sich theoretisch bestimmen:

$$\frac{g-2}{2} = 0.0011596524(\pm 4).$$

Betrachtet man ähnliche Diagramme für eine Wechselwirkung des Elektrons mit dem Kern via eines Coulomb-Potentials, so erhält man die *Lamb-Verschiebung*.

mit der Energie E einer Punktmasse. Daraus folgt

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 \gamma^2 (c^2 - v^2) = m^2 c^2.$$

Somit sind wir in der Lage, die *relativistische Energie-Impuls-Beziehung* anzugeben:

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2, \tag{1.16a}$$

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2}. \tag{1.16b}$$

1.2 Die Klein-Gordon-Gleichung

Die Schrödingergleichung kann aus Sicht der Relativitätstheorie nicht korrekt sein, denn sie ist nicht invariant unter einer Lorentztransformation. Diese wurde gerade aus der klassischen Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \tag{1.17}$$

unter Verwendung der Jordanschen Ersetzungsregeln

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar\partial_t, \\ \mathbf{p} &\rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla \end{aligned} \tag{1.18}$$

motiviert.

Aufstellen einer Lorentz-invarianten quantenmechanischen Gleichung:

Verwende die Ersetzungsregeln (1.18) in der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung (1.16a), aber nicht (1.16b), da sonst die Wurzel aus einem Differentialoperator benötigt wird (unendlich hohe Ableitungen):

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi = [m^2 c^4 - \hbar c^2 \nabla^2] \psi \tag{1.19}$$

Wir erhalten die *Klein-Gordon-Gleichung*.

Diese Schreibweise lässt sich noch vereinfachen

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 \\ &= \partial^\mu \eta_{\mu\nu} \partial^\nu \\ &= \partial_\mu \partial^\mu \end{aligned} \tag{1.20}$$

oder mit dem D'Alembert-Operator

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu \tag{1.21}$$

erhalten wir

$$\Rightarrow \left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0 \quad (1.22a)$$

$$\Rightarrow \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0. \quad (1.22b)$$

Dies ist die eigentliche Darstellung der Klein-Gordon-Gleichung. Sie besitzt folgende unerwünschte Eigenschaften:

- ▶ Lösung ist das Skalarfeld ψ . Die Lösungen beschreiben ein Teilchen ohne Spin, d.h. wir erhalten keine geeignete Gleichung zur Beschreibung eines Elektrons.
- ▶ Als Lorentzskalar ist dieses ψ invariant unter Lorentztransformationen.
- ▶ Anders als in der Quantenmechanik gefordert, benötigt man zwei Anfangsbedingungen, nämlich

$$\psi(\mathbf{r}, t = 0) = \dots, \quad \dot{\psi}(\mathbf{r}, t = 0) = \dots,$$
 um die Zeitentwicklung berechnen zu können, d.h. es tritt ein Widerspruch zu den Postulaten der Quantenmechanik auf!
- ▶ Die Lösungen ψ können auf negative Wahrscheinlichkeitsdichten führen. Dies ist jedoch problematisch für die Interpretation der Wellenfunktion!

Energiespektren (freies Teilchen)

Die Klein-Gordon-Gleichung (1.22b) besitzt als freie Lösung die ebenen Wellen

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{i\hbar(Et - \mathbf{p}\mathbf{r})} \quad (1.23a)$$

mit

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (1.23b)$$

d.h. zu jedem Impuls \mathbf{p} oder Wellenvektor $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ gibt es,

- ▶ eine Lösung positiver Energie,
- ▶ eine Lösung negativer Energie.

In Abbildung 2 ist dies veranschaulicht. Für die Energie sind Werte von $E \rightarrow -\infty$ möglich, d.h. es liegt ein Stabilitätsproblem vor!

1.3 Die Dirac-Gleichung

Einige Probleme der Klein-Gordon-Gleichung lassen sich beseitigen, wenn man eine Differentialgleichung erster Ordnung findet. Diese wurde 1928 von P. Dirac aufgestellt. Die Forderungen an diese Gleichung sind:

- ▶ relativistische Kovarianz,
- ▶ nur Ableitungen erster Ordnung treten auf,

Jetzt führen wir ein

$$m = m_r + \underbrace{\Delta m}_{\mathcal{O}(\alpha)} + \mathcal{O}(\alpha)^2, \quad (5.33)$$

dann wird der Nenner in Gleichung (5.32) zu

$$q - \frac{m_r c}{\hbar} - \frac{\Delta m c}{\hbar} - \frac{3\alpha m_r c}{2\pi\hbar\delta} + \mathcal{O}(\alpha)^2. \quad (5.34)$$

Dieser Term divergiert genau dann nicht mehr, sofern

$$\Delta m = -\frac{3\alpha m_r}{2\pi\delta} \quad (5.35)$$

gilt.

Auf ähnliche Weise absorbiert man die Divergenz im Zähler. Zu beachten gilt, dass die inneren Linien immer zusammen mit Vertices und weiteren dort verknüpften Linien auftreten. Dabei ist der Vertex proportional zur Elementarladung e , welche wiederum aufgespalten werden kann in

$$e = e_r + \Delta e. \quad (5.36a)$$

Der Zähler aus (5.32) divergiert genau dann nicht, wenn

$$\Delta e = \frac{\alpha e_r}{3\pi\delta}. \quad (5.36b)$$

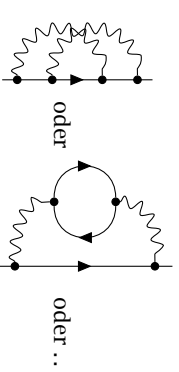
Diese Renormierung gelingt konsistent in der Quantenelektrodynamik, das heißt in allen divergierenden Termen mit denselben Werten. Es treten in allen messbaren Größen nur die renormierten Massen m_r und Ladungen e_r auf. Die nackten Massen m und Ladungen e , die wie Δm und Δe divergieren, sind nun reine Rechengrößen ohne physikalische Relevanz. Ihr Divergieren spielt keine Rolle für die Theorie. Für die konkrete Rechnung verwendet man überall m_r und e_r statt m und e und hat keine divergierenden Terme mehr, also zum Beispiel

$$S_r^{(2)}(q) = \frac{1}{q - \frac{m_r c}{\hbar} \left(1 + \frac{\alpha\hbar}{2\pi} \frac{R_S(q)}{m_r c} \right)} \quad (5.37)$$

statt dem divergierenden Integral (5.24b).

5.8.3 Anmerkungen

Bisher wurde nur die Regularisierung und Renormierung in niedrigster Ordnung betrachtet, weiterhin muss man Graphen der Form



Der Faktor l^{4-d} spiegelt hierbei eine Korrektur der Einheiten wider. Mit der Umrechnung

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{(az + b(z+1))^2} \tag{5.28}$$

wird daraus

$$\Sigma^{(2)}(q) = \frac{-ie^2 \mu_0 c l^{4-d}}{(2\pi)^d} \int_0^1 dz \int \frac{y^\alpha \left(\not{q} - \not{k} + \frac{mc}{h} \right) \gamma_\alpha d^d k}{\left[(q-k)_\mu (q-k)^\mu z - \left(\frac{mc}{h} \right)^2 z + k_\mu k^\mu (1+z) + i\epsilon \right]^2} \tag{5.29}$$

In einigen Rechenschritten kann man zeigen, dass

$$\Sigma^{(2)}(q) = \frac{-ie^2 \mu_0 c l^{4-d}}{(2\pi)^d} \int_0^1 dz \int d^d k \frac{y^\alpha \left(\not{q} - \not{k} + \frac{mc}{h} \right) \gamma_\alpha}{\left[(q-k)_\mu (q-k)^\mu z - \left(\frac{mc}{h} \right)^2 z + k_\mu k^\mu (1+z) + i\epsilon \right]^2} \tag{5.30a}$$

in einen divergierenden Anteil $\propto \delta^{-1}$ (für $d = 4$ gilt $\delta \rightarrow 0$) und einen regulären

$$R_\Sigma(q) = \frac{(1 + \xi)q}{2} - (1 + 2\xi) \frac{mc}{h} + \int_0^1 \left[(1-z) \not{q} - 2 \frac{mc}{h} \right] \ln \left(\frac{m^2 c^2 z - q_\mu q^\mu z (1-z) \hbar^2}{4\pi \mu_0^2 \hbar^2} \right) dz \tag{5.30b}$$

zerfällt. Dabei ist ξ eine Integrationskonstante.

5.8.2 Konvergente Matrixelemente durch Renormierung

Der erste Schritt in der Beseitigung der Divergenzen besteht darin, (5.24a) umzuschreiben

$$\tilde{S}_F^{(2)} = \tilde{S}_F(q) + \tilde{S}_F(q) \Sigma^{(2)}(q) \tilde{S}_F(q) \approx \frac{1}{\tilde{S}_F^{-1}(q) - \Sigma^{(2)}(q)} \tag{5.31}$$

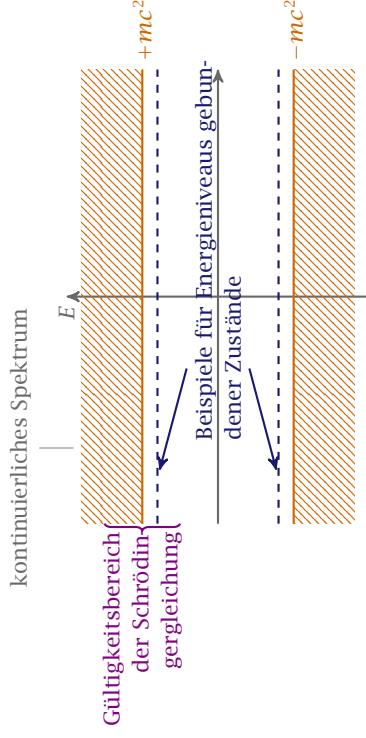
Tatsächlich ist dies bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}[(\Sigma^{(2)}(q))^2]$ identisch mit (5.24a)

$$\frac{1}{\tilde{S}_F^{-1}(q) - \Sigma^{(2)}(q)} = \tilde{S}_F(q) + \tilde{S}_F(q) \Sigma^{(2)}(q) \tilde{S}_F(q) + \tilde{S}_F(q) \Sigma^{(2)}(q) \tilde{S}_F(q) \Sigma^{(2)}(q) \tilde{S}_F(q) + \dots$$



und enthält in konsequenter Reihenfolge alle höheren Beiträge von Korrekturen desselben Typs.

$$\begin{aligned} \tilde{S}_F^{(2)}(q) &\stackrel{(5.31)}{=} \frac{1}{\tilde{S}_F^{-1}(q) - \Sigma^{(2)}(q)} \\ &\stackrel{(77)}{=} \frac{1}{\not{q} - \frac{mc}{h} - \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{4}{\delta} \frac{mc}{h} \not{q} + R_\Sigma(q) \right)} \\ &\approx \frac{1 - \frac{\alpha}{2\pi\delta}}{\not{q} - \frac{mc}{h} \left(1 + \frac{3\alpha}{2\pi\delta} \frac{\not{q}h}{mc} + \frac{R_\Sigma(q)}{mc} \right)} + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned} \tag{5.32}$$



► 2 Energiespektrum: Lösung der Klein-Gordon-Gleichung im Fall eines freien Teilchens.

- die Lösungen ψ der neuen Gleichung müssen auch die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen,
- die Gleichung muss eine positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte ergeben.

Bemerkung: Hier wird eine Argumentation zum Aufstellen der Dirac-Gleichung aufgeführt, wie sie etwa im Anhang des Lehrbuches von F. Schwabl (siehe Literaturverzeichnis) zu finden ist. Sie entspricht nicht dem üblichen Weg, der aber bereits Bestandteil der Kursvorlesungen ist.

Ausgangspunkt der Argumentation sei das freie Teilchen in der Schrödingergleichung

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \tag{1.24}$$

wobei wir die Relation

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{1.25}$$

zum Umschreiben des Hamiltonoperators verwenden. Der Vektor $\boldsymbol{\sigma}$ besitzt die Pauli-Matrizen als Einträge, d.h.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Man kann dann schreiben

$$H = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{2m} \stackrel{(1.25)}{=} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\boldsymbol{\sigma} \underbrace{(\mathbf{p} \times \mathbf{p})}_{=0} \frac{1}{2m} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \tag{1.26}$$

Nach dem Prinzip der minimalen Ankopplung erfolgt die Ersetzung

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}, \\ H &\rightarrow H + e\phi \end{aligned} \tag{1.27}$$

für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld. Im gerade gefundenen Ansatz ergibt sich damit

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})] + e\phi \\ &\stackrel{(1.25)}{=} \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + \frac{i}{2m} \boldsymbol{\sigma} [(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A})] + e\phi \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + e\phi. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Dies ist die **Pauli-Gleichung**, sie entspricht dem nicht relativistischen Grenzfall der Dirac-Gleichung.

Ähnlich lässt sich die relativistische Energie-Impuls-Beziehung behandeln.

$$\left(\frac{E}{c} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \right) \left(\frac{E}{c} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \right) = \frac{E^2}{c^2} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \stackrel{(1.25)}{=} \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \stackrel{(1.16a)}{=} m^2 c^2. \quad (1.29)$$

Mit den Jordanschen Ersetzungsregeln erhält man

$$\left(\frac{i\hbar}{c} \partial_t + \boldsymbol{\sigma} \cdot i\hbar \nabla \right) \underbrace{\left(\frac{i\hbar}{c} \partial_t - \boldsymbol{\sigma} \cdot i\hbar \nabla \right)}_{=-m c \varphi_2} \underbrace{\varphi}_{=-\varphi_1} = m^2 c^2 \underbrace{\varphi}_{=-\varphi_1}. \quad (1.29)$$

Mit den beiden zweikomponentigen Spinoren φ_1 und φ_2 erhalten wir zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung.

$$i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial(ct)} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right] \varphi_1 = m c \varphi_2, \quad (1.30a)$$

$$i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial(ct)} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right] \varphi_2 = m c \varphi_1. \quad (1.30b)$$

Mit der Schreibweise $\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \sigma^i \partial_i$ und $\partial/\partial(ct) = \partial_0$ folgt für (1.30a) und –(1.30b) – (1.30a)

$$i\hbar \left[\partial_0 (\varphi_2 - \varphi_1) + \sigma^i \partial_i (\varphi_2 + \varphi_1) \right] = m c (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (1.31a)$$

$$-i\hbar \left[\partial_0 (\varphi_2 + \varphi_1) + \sigma^i \partial_i (\varphi_2 - \varphi_1) \right] = -m c (\varphi_2 + \varphi_1). \quad (1.31b)$$

Mit dem Vierer-Spinor

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \varphi_2 - \varphi_1 \\ \varphi_2 + \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

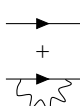
ergibt sich

$$i\hbar \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \partial_0 + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \partial_i - \frac{m c}{i\hbar} \right] \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (1.33)$$

oder

$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{m c}{\hbar} \right] \boldsymbol{\psi} = 0$$

► **Pauli-Villars-Regularisierung:** Terme mit derselben divergierenden Asymptotik werden abgezogen. Betrachten wir zum Beispiel die Selbstenergie des Elektrons



$$\tilde{S}_F^{(2)}(q) + \tilde{S}_F(q) \Sigma^{(2)}(q) \tilde{S}_F(q) = \tilde{S}_F^{(2)}(q) \quad (5.24a)$$

mit

$$\Sigma^{(2)}(q) = i \frac{e^2}{\hbar} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}_{F_{\alpha\beta}}(k) \gamma^\alpha \tilde{S}_F(q-k) \gamma^\beta, \quad (5.24b)$$

wobei für den Photonpropagator $\tilde{D}_{F_{\alpha\beta}}(k) \propto \frac{1}{k_\mu k^\mu + i\epsilon}$ gilt. Dies wird nun ersetzt durch

$$\frac{1}{k_\mu k^\mu + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k_\mu k^\mu + i\epsilon} - \frac{1}{k_\mu k^\mu + K_\mu K^\mu + i\epsilon}$$

mit großen aber endlichen K . Es gilt dann für kleine $k \rightarrow 0$, dass der subtrahierte Term unbedeutend wird und für große $k \rightarrow \infty$ geht die Differenz gegen 0, womit die Divergenz aufgehoben ist.

► **Dimensionsmäßige Regularisierung:** Der Ursprung der Divergenz ist die Potenz in $d^4 k$. Als Ansatz wird nun das Integral in der Dimension

$$d = 4 + \delta \quad (5.25)$$

ausgewertet. Der Term in (5.24b) lautet explizit

$$\Sigma^{(2)}(q) = \frac{-ie^2 \mu_0 c \hbar^{\alpha\beta}}{(2\pi)^4} \int d^d k \frac{\gamma^\alpha \left(\not{q} - \not{k} + \frac{m c}{\hbar} \right) \gamma^\beta}{(k_\mu k^\mu + i\epsilon) (q-k)_\mu (q-k)^\mu - \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^2 + i\epsilon} \quad (5.26a)$$

oder in d Dimensionen

$$\Sigma^{(2)}(q) = \frac{-ie^2 \mu_0 c \hbar^{\alpha\beta}}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{\gamma^\alpha \left(\not{q} - \not{k} + \frac{m c}{\hbar} \right) \gamma^\alpha}{(k_\mu k^\mu + i\epsilon) (q-k)_\mu (q-k)^\mu - \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^2 + i\epsilon}. \quad (5.26b)$$

Der Faktor l^{4-d} spiegelt hierbei eine Korrektur der Einheiten wider. Mit der Umrechnung

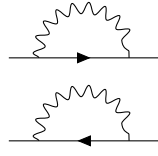
$$\Sigma^{(2)}(q) = \frac{-ie^2 \mu_0 c \hbar^{\alpha\beta}}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{\gamma^\alpha \left(\not{q} - \not{k} + \frac{m c}{\hbar} \right) \gamma^\beta}{(k_\mu k^\mu + i\epsilon) \left[(q-k)_\mu (q-k)^\mu - \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^2 + i\epsilon \right]} \quad (5.27a)$$

oder in d Dimensionen

$$\Sigma^{(2)}(q) = \frac{-ie^2 \mu_0 c \hbar^{\alpha\beta}}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{\gamma^\alpha \left(\not{q} - \not{k} + \frac{m c}{\hbar} \right) \gamma^\alpha}{(k_\mu k^\mu + i\epsilon) \left[(q-k)_\mu (q-k)^\mu - \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^2 + i\epsilon \right]}. \quad (5.27b)$$

5.7.3 Verbleibende divergente Terme

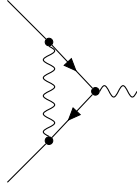
Neben den Vakuumblasen, die in den Übergangsamplituden nur einen irrelevanten Phasenfaktor liefern, müssen drei primitiv-divergente Graphen betrachtet werden, deren Divergenz nicht in irgendeiner Form kompensiert werden kann.



▶ Selbstenergie des Elektrons/Positrons $D = 1$



▶ Selbstenergie Photons $D = 2$



▶ Vertexkorrektur $D = 0$

Alle divergierenden Diagramme höherer Ordnung enthalten diese Graphen.

5.8 Ideenskizze zur Regularisierung und Renormierung

Die Divergenzen können ein grundlegendes Scheitern der Theorie bedeuten. Es gibt jedoch eine Möglichkeit so zu behandeln, dass sich ein konsistentes Ergebnis ableiten lässt, das in hervorragender Übereinstimmung mit dem Experiment ist. Die Grundlegende Idee besteht darin, dass alle Divergenzen in prinzipiell nicht messbare Konstanten *verschoben* werden. Dies hat zur Folge, dass die Wirkungsquerschnitte theoretisch berechenbar bleiben.

5.8.1 Ansätze zur Regularisierung

Die Regularisierung enthält den Schritt, die Divergenzen von regulären Anteilen der Integrale in additive Terme abzuspalten. Dabei gibt es zwei Ansätze:

mit

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \tag{1.34a}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.34b}$$

Dies ist die *Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen*. Eine andere Schreibweise ist

$$i\hbar \partial_t \psi = \left(\frac{\hbar c}{i} \alpha^k \partial_k + \beta m c^2 \right) \psi \tag{1.35a}$$

mit

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

$$\alpha^i = \beta \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.35b}$$

Eine besonders kompakte Schreibweise ergibt sich unter Verwendung des *Feynman-Dagger Symbols*

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \frac{\gamma^0}{c} \partial_t + \boldsymbol{\gamma} \nabla$$

$$\not{\hat{p}} = \gamma^\mu \hat{p}_\mu = \gamma^0 \hat{p}_0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

Damit folgt also

$$(\not{\hat{p}} - mc) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{1.36}$$

$$\left(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{1.37}$$

1.3.1 Kontinuitätsgleichung

Multipliziere Gleichung (1.35a) von Links mit $\boldsymbol{\psi}^\dagger = (\boldsymbol{\psi}_1^\dagger, \boldsymbol{\psi}_2^\dagger, \boldsymbol{\psi}_3^\dagger, \boldsymbol{\psi}_4^\dagger)$

$$i\hbar \boldsymbol{\psi}^\dagger \partial_t \boldsymbol{\psi} = \frac{\hbar c}{i} \left(\boldsymbol{\psi}^\dagger \alpha^k \partial_k \boldsymbol{\psi} + mc^2 \boldsymbol{\psi}^\dagger \beta \boldsymbol{\psi} \right) \tag{1.38a}$$

Die dazu konjugiert-komplexe Relation ist:

$$-i\hbar \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^\dagger}{\partial t} \boldsymbol{\psi} = -\frac{\hbar c}{i} (\partial_t \boldsymbol{\psi}^\dagger) \alpha^i \boldsymbol{\psi} + mc^2 \boldsymbol{\psi}^\dagger \beta \boldsymbol{\psi}. \tag{1.38b}$$

Betrachte (1.38b) – (1.38a)

$$\partial_t \boldsymbol{\psi}^\dagger \boldsymbol{\psi} = -c (\partial_t \boldsymbol{\psi}^\dagger) \alpha^i \boldsymbol{\psi} + c \boldsymbol{\psi}^\dagger \alpha^i \partial_t \boldsymbol{\psi} + \frac{imc^2}{\hbar} (\boldsymbol{\psi}^\dagger \beta \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}^\dagger \beta \boldsymbol{\psi}). \tag{1.39}$$

Hierbei gilt

$$\begin{aligned}
 \beta^\dagger &= \beta & (1.40a) \\
 \alpha^{i\dagger} &= \alpha^i & (1.40b) \\
 \varrho &= \psi^\dagger \psi & (1.40c) \\
 j^0 &= c\varrho & (1.40d) \\
 j^k &= c\psi^\dagger \alpha^k \psi & (1.40e)
 \end{aligned}$$

und es folgt

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{1.40f}$$

Dies entspricht einer *Kontinuitätsgleichung* für die positiv definierte Dichte g :

1.3.2 Ruhende Teilchen

Die Dirac-Gleichung für das ruhende Teilchen, also

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = 0 \tag{1.41}$$

lautet

$$\begin{aligned}
 i\hbar\partial_t \psi(\mathbf{r}, t) &= mc^2 \gamma^0 \psi(\mathbf{r}, t) \\
 &= mc^2 \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

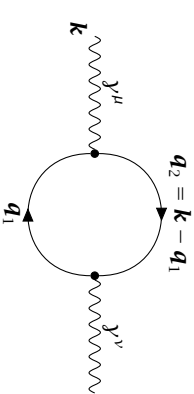
Diese hat vier Lösungen

$$\begin{aligned}
 \psi_1^{(+)} &= e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi_2^{(+)} &= e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \psi_1^{(-)} &= e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi_2^{(-)} &= e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Wir erhalten also jeweils zwei entartete Zustände positiver und negativer Energie. Auf die energetisch entarteten Komponenten (+) oder (-) wirken in (1.33) gerade die Pauli-Spinnmatrizen, dies entspricht den beiden Einstellungen des Spin 1/2.

Folge: Die Dirac-Gleichung beschreibt offensichtlich Spin-1/2-Teilchen, kann also die gesuchte relativistische Gleichung für Elektronen sein.

Aber: Es gibt auch die Zustände negativer Energie!



Wir finden mit den Feynman-Regeln und der Auswertung aller sofort lösbaren Integrale

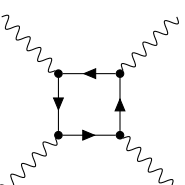
$$S_{SP}^{(2)} = - \underbrace{\frac{e^2}{(2\pi)^4 \hbar^2}}_{\text{innere Photonlinien}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i\tilde{D}_{F\alpha\mu}(k) \underbrace{\int \text{tr} [\gamma^\mu \tilde{S}_F(q) \gamma^\nu \tilde{S}_F(q-k)]}_{\text{Spur im 4-dim Spinorraum}} d^4 q i\tilde{D}_{F\nu\beta}. \tag{5.22}$$

Für große Werte des Impulses q liefern die Feynman-Propagatoren eine Abhängigkeit $\tilde{S}_F(q) \propto \frac{1}{|q|}$ und $d^4 q \propto |q|^4$, somit divergiert der Integrand quadratisch, dies wird auch *Ultraviolettdivergenz* genannt, da hohe Frequenzen notwendig für die Divergenz sind. Tatsächlich findet man in der Quantenelektrodynamik unendlich viele divergierende Terme, die sich aber auf endlich viele primitiv-divergente reduzieren lassen, aus denen alle weiteren zusammengesetzt werden. Durch einfaches Abzählen der Potenzen der Propagatoren sowie aus der Kenntnis der Zahl der Linien an den Vertizes lässt sich folgende Regel ableiten:

$$D = 4 - 3\frac{F_a}{2} - P_a. \tag{5.23}$$

Dabei ist D der Divergenzgrad, der eine logarithmische Divergenz für den Fall $D = 0$ beschreibt, wohingegen $D = n > 0$ die Potenz der Divergenz angibt, F_a ist die Anzahl der äußeren Fermionlinien und P_a die Anzahl der äußeren Photonlinien.

5.7.2 Problemloses Beispiel: Photon-Photon-Streuung



- ▶ zwei einlaufende Photonen
- ▶ zwei auslaufende Photonen
- ▶ Photonen streuen an Photonen

Im

Gegensatz zur klassischen Elektrodynamik (Superpositionsprinzip) gibt es die Photon-Photon-Streuung in der Quantenelektrodynamik. Nach (5.23) ergibt sich für die Photon-Photon-Streuung einen Divergenzgrad von $D = 0$, was eine logarithmische Divergenz bedeutet. Tatsächlich sind es jedoch innere Symmetrien (hier die Eichinvarianz der Elektrodynamik), die dazu führen, dass sich divergierende Teilintegrale gegenseitig aufheben. Damit konvergiert die Photon-Photon-Streuung. Experimentell wurde diese Art der Lichtstreuung noch nicht nachgewiesen, da der Effekt stark unterdrückt ist (4 innere Fermionlinien werden benötigt).

wobei der Teilchenstrom zum Beispiel durch das Dirac-Feld beschrieben werden kann,

$$\mathbf{j}_{\text{ein}}^\alpha = \langle \hat{\mathbf{j}}_{\text{ein}}^\alpha \rangle \quad (5.20)$$

Dabei verwendet man (3.49a) sowie die Übergangsrate

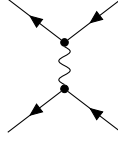
$$d\dot{W}_{p \rightarrow p'}^{\text{el}} = \dot{w}_{p \rightarrow p'} \prod_{n=1}^F dN(p'_n) \quad (5.21a)$$

im Impulsraum für F Teilchen, wobei gilt

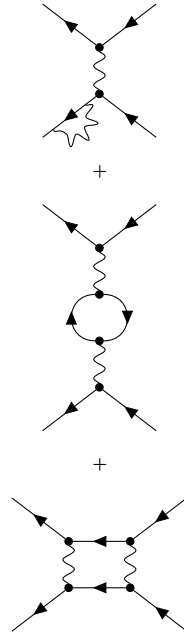
$$\dot{w}_{p \rightarrow p'} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_{fi}|^2}{T} \quad (5.21b)$$

5.7 Korrekturen höherer Ordnung

Für die korrekten Übergangsrate sind in (5.21b) alle Zustände zu verwenden, welche den richtigen Anfangszustand $|i\rangle$ mit dem richtigen Endzustand $|f\rangle$ verknüpfen, also den passenden Übergang enthalten. Nehmen wir als Beispiel die Elektron-Elektron-Streuung:



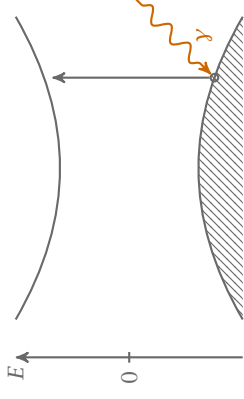
Diese hat in 4. Ordnung zusätzliche Beiträge, zum Beispiel



Diese liefern Korrekturen von der Größenordnung $\alpha \cdot S^{(2)} \approx \frac{1}{137} \cdot S^{(2)}$.

5.7.1 Divergenzen

Bei den Korrekturen tritt eine Schwierigkeit der Theorie auf. Betrachten wir den zweiten Term aus dem Beispiel mit der Selbstenergie des Photons:



► 3 Ein angeregter Zustand entsteht durch anheben eines Teilchens aus dem Dirac-See in den positiven Energiebereich.

1.3.3 Bedeutung der Zustände negativer Energie

Die Zustände positiver Energie beschreiben die gewünschten Spin-1/2-Teilchen. Doch die Zustände negativer Energien lassen sich nicht ignorieren, denn sobald die Teilchen nicht mehr ruhen, gibt es Kopplungen zwischen den Lösungen positiver und negativer Energie. Zudem besteht – wie in der Klein-Gordon-Gleichung – das Problem des unbeschränkten negativen Energiespektrums, was keinen stabilen Grundzustand zur Folge hätte.

a) Vorschlag von Dirac: Alle Zustände negativer Energien sind besetzt. Da es sich um Spin-1/2-Teilchen, also um Fermionen handelt, können keine Zerfälle in diese Zustände stattfinden. Der Vakuumzustand ist dann ein Dirac-See bestehend aus Teilchen mit negativer Energie. Um einen angeregten Zustand zu erhalten, wird ein Teilchen aus dem Dirac-See (negative Energie) in den Bereich positiver Energie angehoben (vgl. Abbildung 3). Der besetzte Zustand positiver Energie entspricht dann einem Elektron, die fehlende Besetzung eines Zustandes negativer Energie (Loch) ist ein Positron (Antiteilchen). Dieser Übergang in einen angeregten Zustand wird auch *Paarbildung* genannt.

Es zeigen sich jedoch Probleme dieser Interpretation. Der Grundzustand besitzt weiterhin die Energie $E = -\infty$. Zudem gibt es Probleme mit der Unschärferelation. Gehen wir davon aus, dass ein gut lokalisiertes Teilchen durch eine Ortsmessung gegeben ist,

$$\Delta x < \frac{\hbar}{4mc}, \quad (1.45)$$

dann erhält man für die Impulsunschärfe

$$\Delta p \geq 2mc, \quad (1.46)$$

was auf eine Energieunschärfe von $\Delta E \approx c\Delta p > 2mc^2$ führt und somit genügend Energie aufbringt, eine Paarbildung stattfinden zu lassen. Das Bild des Dirac-Sees ist zudem nur für Fermionen und nicht für Bosonen geeignet. Außerdem zeigen sich Asymmetrien zwischen Positronen und Elektronen.

b) Feynman-Stückelberg-Interpretation: Die Lösungen der Dirac-Gleichung für ein Teilchen mit Impuls sind von der Form

$$\psi_+ = \psi_0 e^{-ik_\mu x^\mu}, \quad \psi_- = \psi_0 e^{ik_\mu x^\mu}. \quad (1.47)$$

Umschreiben der Lösung negativer Energie führt auf eine Exponentialfunktion der Form

$$\psi_- = \psi_0 e^{ik_\mu x^\mu} = \psi_0 e^{-ik_\mu (-x^\mu)} \quad (1.48)$$

Damit besitzen die Antiteilchen auch positive Energien, bewegen sich aber im gespiegelten Raum ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) rückwärts in der Zeit ($t \rightarrow -t$). Diese Interpretation liefert einige Vorteile:

- ▶ keine negativen Energien,
 - ▶ kein Problem mit der Unschärferelation,
 - ▶ funktioniert für Bosonen und Fermionen.
- Dennoch ist sie nicht intuitiv und nur schwer gedanklich nachzuvollziehen.

1.3.4 Im elektromagnetischen Feld

Mit dem Viererpotential

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ -A_x \\ -A_y \\ -A_z \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

lautet die Dirac-Gleichung

$$\left[\gamma^\mu (\partial_\mu - eA_\mu) - \frac{mc}{\hbar} \right] \underline{\psi} = 0$$

oder

$$\left[i\partial - e\mathbf{A} - \frac{mc}{\hbar} \right] \underline{\psi} = 0. \quad (1.50)$$

Mit dieser Gleichung ist die relativistische Beschreibung des Wasserstoffatoms möglich. Im Moment treten die Felder als klassische Größen auf, es ist jedoch möglich und erforderlich (Photoeffekt), die Felder zu quantisieren. Quantisieren wir jedoch die elektrischen und magnetischen Felder in (1.50), so werden zwei Sichtweisen der Quantenmechanik vermischt.

- ▶ Elektrodynamik: Quantisierung eines Feldes, höhere Anregung bedeutet höhere Teilchenzahl (Photonen).
- ▶ Materie: Quantisierung von Punktteilchen, jedes Teilchen benötigt eine Wellenfunktion und eine eigene oder gekoppelte Dirac-Gleichung.

Die Dirac-Gleichung lässt im Allgemeinen einige Wünsche offen. Zum einen müssen negative Energien interpretiert werden, zum anderen wäre eine einheitliche Theorie für die Materie und ihre Wechselwirkungen hilfreich. Diese einheitliche Theorie sollte, wenn möglich, auch die Postulate der Quantenmechanik, nämlich

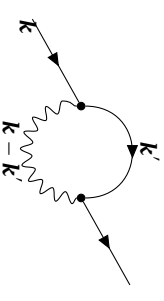
- ▶ Symmetrisierung/Antisymmetrisierung der Wellenfunktion für Bosonen/Fermionen
 - ▶ Forderung nach einer Normierung der Wellenfunktion für eine Teilchenzahl
- auf einen festen Grund stellen. Es wird daher notwendig Quantenfeldtheorien aufzustellen.

Das Produkt dieser drei Terme liefert die Streuamplitude

$$\begin{aligned} S_{\text{direkt}}^{(2)} &= i \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{(mc^2)^2 e^2 \mu_0 c}{\hbar \sqrt{E_{k_1} E_{k_2} E_{k_2'} E_{k_1'}}} \eta_{\alpha\beta} \bar{u}(k_1', s_1') \gamma^\alpha \underline{u}(k_1, s_1) \bar{u}(k_2', s_2') \gamma^\beta \underline{u}(k_2, s_2) \\ &\quad \times \int d^4 k_p \frac{\delta^{(4)}(k_1' + k_p - k_1) \delta^{(4)}(k_2' - k_p - k_2)}{k_{p\mu} k_p^\mu + i\epsilon} \\ &= \frac{i e^2 m^2 c^5 \mu_0 \eta_{\alpha\beta} \bar{u}(k_1', s_1') \gamma^\alpha \underline{u}(k_1, s_1) \bar{u}(k_2', s_2') \gamma^\beta \underline{u}(k_2, s_2)}{(2\pi)^2 \hbar \sqrt{E_{k_1} E_{k_2} E_{k_2'} E_{k_1'}} (k_{1\mu} - k_{1\mu}') (k_1^\mu - k_1'^\mu)} \delta^{(4)}(k_1' + k_2' - k_1 - k_2) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Hier wurde nur eines der beiden Diagramme der direkten Streuung berechnet. Das andere unterscheidet sich nur durch $\mathbf{k}_p \rightarrow -\mathbf{k}_p$ und führt auf dasselbe Ergebnis. Tatsächlich sind beide Fälle bereits in den Feynman-Regeln enthalten. Die beiden Diagramme sind topologisch äquivalent, nur eines wird berechnet. Die Zahlenfaktoren in den Feynman-Regeln sind darauf angepasst. In jeder Ordnung n kommen $n!$ identische Terme vor, die sich mit dem Faktor $\frac{1}{n!}$ der Reihenentwicklung (4.23) aufheben.

Durch die Erhaltung des Viererimpulses an den Vertizes hat das Photon einen eindeutigen Viererimpuls. Dieser erfüllt aber nicht die Dispersionsrelation $\omega = c|\mathbf{k}|$, es handelt sich hierbei um sogenannte *virtuelle Photonen*. Treten zwei innere Linien auf, so ist der Impuls der zugehörigen Teilchen nicht festgelegt, da die Viererimpulse der Vertizes auf beide aufgeteilt werden können.



Der Term der Austauschstreueung unterscheidet sich in zwei Punkten von (5.18):

- ▶ der Vertauschung $(\mathbf{k}_2', s_2') \leftrightarrow (\mathbf{k}_1', s_1')$,
- ▶ einem zusätzlichen Minuszeichen durch eine zusätzlich benötigte Permutation der fermionischen Feldoperatoren.

5.6 Wirkungsquerschnitte

Beobachtbar im Experiment sind Wirkungsquerschnitte, also die Rate eines Übergangs eines durch die Fläche $d\sigma$ einfallenden Teilchenstroms \dot{J}_{ein} in ein Raumwinkelement $d\Omega$. Der *differenzielle Wirkungsquerschnitt* ist definiert durch

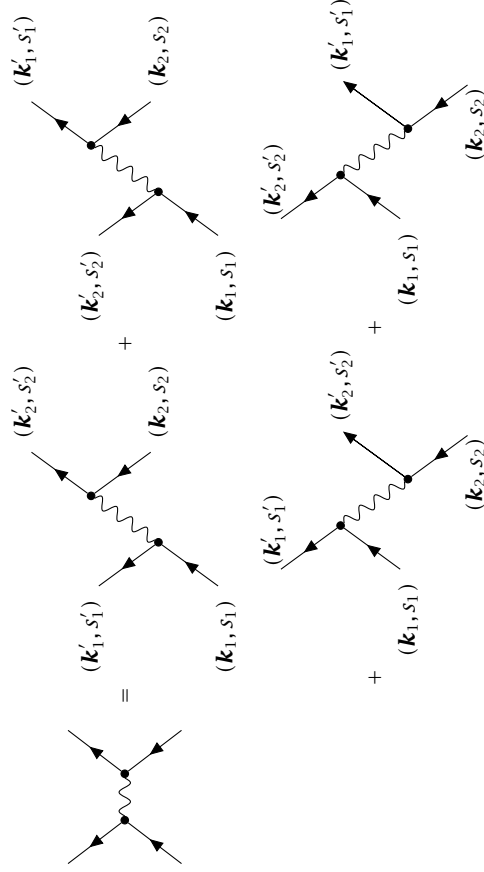
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{|\dot{J}_{\text{ein}}|} \frac{dW_{n \rightarrow d^3 p'}}{d\Omega}, \quad (5.19)$$

Die zugehörigen nichtverschwindenden Anfangs- und Endzustände sind

$$|i\rangle = b^\dagger(\mathbf{k}_1, s_1) b^\dagger(\mathbf{k}_2, s_2) |0\rangle, \tag{5.17a}$$

$$|f\rangle = b^\dagger(\mathbf{k}'_1, s'_1) b^\dagger(\mathbf{k}'_2, s'_2) |0\rangle. \tag{5.17b}$$

Die Tatsachen, dass in den Modenentwicklungen der Feldoperatoren alle Impulse und Spins vorkommen und somit die Zustände (\mathbf{k}_1, s_1) , (\mathbf{k}_2, s_2) , (\mathbf{k}'_1, s'_1) und (\mathbf{k}'_2, s'_2) mit jedem Vertex verknüpft sind sowie durch die Integration über alle Zeiten in $\int dx_1 \int dx_2 \dots$ die zeitliche Reihenfolge vertauschbar ist, führt darauf, dass sich hinter dem Feynman-Diagramm vier Summanden verbergen, die sich aus (5.16) ergeben.



Dabei heißen die Diagramme des ersten und dritten Summanden *direkte Streuung* und die des zweiten und vierten *Austauschstreuung*.

b) Streuamplitude Die Streuamplitude ergibt sich aus den Feynman-Regeln. Für die direkte Streuung erhält man (mit dem Photonenimpuls k_p)

- ▶ am linken Vertex

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{mc^2}{\sqrt{E_{k_1} E_{k'_1}}} \bar{u}(\mathbf{k}'_1, s'_1) \gamma^\alpha u(\mathbf{k}_1, s_1) \left(-\frac{ie}{\hbar} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k'_1 + k_p - k_1),$$

- ▶ am rechten Vertex

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{mc^2}{\sqrt{E_{k_2} E_{k'_2}}} \bar{u}(\mathbf{k}'_2, s'_2) \gamma^\beta u(\mathbf{k}_2, s_2) \left(-\frac{ie}{\hbar} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k'_2 - k_p - k_2),$$

- ▶ durch die innere Photonlinie

$$-i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\hbar \mu_0 c \eta_{\alpha\beta}}{k_{\mu\nu} k_\mu^\beta + i\epsilon}.$$

2 Felder und deren Quantisierung

2.1 Ein Beispiel aus der Mechanik

Wir betrachten eine schwingende Saite als verbundene Massepunkte der Masse m . Lassen wir den Abstand d zwischen den einzelnen Massepunkten gegen 0 laufen, so wird das System kontinuierlich (vgl. Abbildung 4).

$$y_j \rightarrow y(x)$$

Für die Differenz zwischen zwei Punkten kann man schreiben

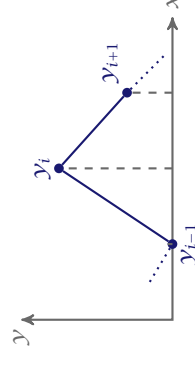
$$y_{j+1} - y_j = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=(j+1/2)d} \cdot d. \tag{2.1}$$

Die Masse wird im Folgenden durch eine Linienmassendichte ausgedrückt

$$m = \rho d \tag{2.2}$$

und die Federkonstante durch ein Elastizitätsmodul

$$D = \frac{\kappa}{d}. \tag{2.3}$$



- ▶ 4 Schwingende Saite.

Für ein endliches d ergibt sich eine Lagrangefunktion der Form

$$\begin{aligned}
 L(\{y_n\}, \{\dot{y}_n\}) &= \sum_{n=1}^{N+1} T_n - V_n \\
 &= \sum_{n=1}^N \frac{m}{2} \dot{y}_n^2 - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{D}{2} (y_n - y_{n-1})^2 \\
 &\stackrel{(2.2)}{=} \sum_{n=1}^N \frac{\varrho d}{2} \dot{y}_n^2 - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{\kappa}{2d} (y_n - y_{n-1})^2 \\
 &\approx \sum_{n=1}^N \frac{\varrho d}{2} \left(\frac{\partial y(nd, t)}{\partial t} \right)^2 - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{\kappa}{2d} \left(\frac{\partial y(d(n-1/2), t)}{\partial x} \right)^2 d^2 \\
 &= \frac{\varrho d}{2} \left[\sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial y(nd, t)}{\partial t} \right)^2 - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{\kappa}{\varrho} \left(\frac{\partial y(d(n-1/2), t)}{\partial x} \right)^2 \right] \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

Lassen wir $N \rightarrow \infty$ und $d \rightarrow 0$ gehen, so wird aus der diskreten Summe ein Integral

$$d \sum \rightarrow \int dx, \tag{2.5}$$

was auf eine kontinuierliche Lagrangefunktion führt,

$$L \stackrel{(2.4)}{=} \int_{(2.5)} dx \frac{\varrho}{2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{\kappa}{\varrho} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]. \tag{2.6}$$

Man nennt \mathcal{L} die **Lagrangedichte** des kontinuierlichen Systems. Die Lagrangefunktion folgt aus dem Integral über die Ortskoordinate x . Die wichtige Variable ist das Feld $y(\mathbf{x})$, welches von dem kontinuierlichen Index x abhängt. Um aus der Lagrangedichte Bewegungsgleichungen gewinnen zu können, gehen wir wie in der klassischen Mechanik vor und benutzen die Variation der Wirkung,

$$y(\mathbf{x}, t) \rightarrow y(\mathbf{x}, t) + \delta y(\mathbf{x}, t),$$

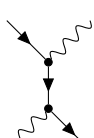
wobei an den Randpunkten $\delta y = 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
 S &= \int L dt = \int dt \int dx \mathcal{L} \left(\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x} \right) \\
 \delta S &= \int dt \int dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)} \frac{\partial (\delta y)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)} \frac{\partial (\delta y)}{\partial x} \right] \\
 &= \int dt \int dx \left[-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)} \right] \cdot \delta y = 0, \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

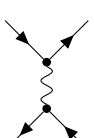
woraus die Euler-Lagrange-Gleichungen abgeleitet werden können,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)} = 0, \tag{2.8}$$

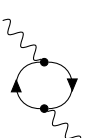
- ▶ 2. und 4. Zeile: Prozesse mit einer inneren Fermionlinie, zum Beispiel die Elektron-Photon-Streuung



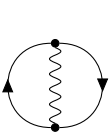
- ▶ 3. Zeile: Prozesse mit einer inneren Photonlinie, zum Beispiel die Elektron-Positron-Streuung (Bhabha-Streuung)



- ▶ 5.-7. Zeile: Prozesse mit zwei inneren Linien, zum Beispiel die Vakuumpolarisation (virtuelles Elektron-Positron-Paar)

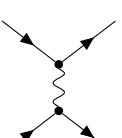


- ▶ 8. Zeile: Sog. Vakuumblase, welche einen divergierenden Anteil liefert und daher ignoriert werden muss.



5.5.3 Elektron-Elektron-Streuung (Møller-Streuung)

a) Übersicht über die Terme Das Feynman-Diagramm ist



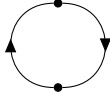
und gehört zum Term

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \left(-\frac{ie}{\hbar} \right)^2 \int : \bar{\psi}_{b^i}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \underline{\psi}_b(x_1) \bar{\psi}_{b^i}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \underline{\psi}_b(x_2) : dx_1 dx_2. \tag{5.16}$$

► **Innere Photonlinie**

$$\bullet \sim \sim \sim \sim \sim \bullet = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}_{F,\alpha\beta}(k) = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\hbar \mu_0 c \eta_{\alpha\beta}}{k_\mu k^\mu + i\epsilon} \quad (2.9)$$

► Ist eine ungerade Anzahl an Transpositionen nötig, um die Fermionenoperatoren in Normalordnung zu bringen, so wird das Ergebnis mit -1 durchmultipliziert.



► Für jede in sich geschlossene Fermionenschleife wird das Ergebnis ebenfalls mit -1 durchmultipliziert.

5.5 Ausgewählte Prozesse 2. Ordnung

5.5.1 Streumatrix 2. Ordnung

Die Streumatrix zweiter Ordnung lautet umgeschrieben in ein normalgeordnetes Produkt

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \left(-\frac{ie}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \left\{ \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)}_{+ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} \right. \\ + \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)}_{+ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} \\ + \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)}_{+ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} \\ + \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)}_{+ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} \\ + \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)}_{+ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} \\ \left. + \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)}_{+ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\alpha A_\alpha(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} \right\}, \quad (5.15)$$

wobei berücksichtigt wurde, dass kommutierende/antikommütierende Operatoren eine verschwindende Kontraktion haben.

5.5.2 Vorkommende Prozesse

Sortiert nach den Zeilen von (5.15):

- 1. Zeile: Verdopplung der Prozesse erster Ordnung und damit kein Beitrag zur Übergangsamplitude

oder mit unserem Beispielsystem (2.6)

$$\varrho \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = 0. \quad (2.9)$$

Wir erhalten also eine Wellengleichung für unsere schwingende Saite und wir sehen, dass die Lagrangedichte und ihre Variation auf physikalisch sinnvolle Gleichungen führen.

2.2 Lagrangeformalismus für allgemeine Felder

Wir führen eine Lagrangedichte ein, die von mehreren Feldern $\phi_r(x)$ und allen ihren ersten Ableitungen $\phi_{r,\mu} = \partial_\mu \phi_r(x)$ abhängt.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}) = \mathcal{L}(\phi, \partial x^0 \phi, \partial x^1 \phi_1, \partial x^2 \phi_1, \partial x^3 \phi_1, \partial x^0 \phi_2, \dots) \quad (2.10)$$

Die Lagrangefunktion ergibt sich dann aus der Integration *nur* über die Ortskoordinaten,

$$L(t) = \int d^3 \mathbf{r} \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}). \quad (2.11)$$

Das Integral über das Gebiet Ω der Raumzeit ergibt dann die Wirkung

$$S(\Omega) = \int_\Omega d^4 x \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}). \quad (2.12)$$

2.2.0.1 Hamiltonsches Variationsprinzip

Analog des Beispiels der schwingenden Saite erfolgt die Variation der Felder

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi_r(x) + \delta \phi_r(x) = \tilde{\phi}_r \quad (2.13)$$

derart, dass

$$\delta \phi_r(x) |_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.14)$$

gilt. Eine Variation der Wirkung (2.12) führt auf die Form

$$\delta S = \int_\Omega d^4 x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \delta \phi_{r,\mu} \right], \quad (2.15)$$

wobei folgende Relation verwendet wurde

$$\begin{aligned} \delta \phi_r(x) &\stackrel{(2.13)}{=} \tilde{\phi}_r(x) - \phi_r(x), \\ \partial_\mu \phi_r(x) &= \tilde{\phi}_{r,\mu}(x) - \phi_{r,\mu}(x) = \delta \phi_{r,\mu}(x), \\ \dots \delta \phi_{r,\mu} &= \delta(\partial_\mu \phi_r(x)) = \partial_\mu \delta \phi_r(x). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Weiterhin verwendet man

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \delta \phi_{r,\mu} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \delta \phi_r \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \right) \delta \phi_r. \quad (2.17)$$

Damit lässt sich die Variation der Wirkung schreiben als

$$\delta S \stackrel{(2.15)}{=} \int_{\Omega} d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \right] \delta \phi_r + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \delta \phi_r \right] \right\}. \quad (2.18)$$

Mit dem Gaußschen Satz berechnet man schließlich

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \delta \phi_r \right] = \int_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \delta \phi_r = 0. \quad (2.19)$$

Daraus folgt für (2.18)

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \right\} \delta \phi_r. \quad (2.20)$$

Da diese Gleichung unabhängig von $\delta \phi_r$ erfüllt sein soll, folgen die Euler-Lagrangegleichungen für die Felder:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} = 0. \quad (2.21)$$

Den Aufwand, den wir betrieben haben, um eine Euler-Lagrangegleichung für Felder herzu-leiten, wird dann nützlich, wenn wir den Formalismus auf relativistische Felder anwenden.

2.2.0.2 Hamiltondichte

Analog zur klassischen Punktmechanik führt man über

$$\phi_r = \phi_{r,t}$$

$$\pi_r = \frac{\mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,t}}. \quad (2.22)$$

Die Impulsdichte hängt dabei im Allgemeinen von allen Raum-Zeit-Ableitungen als auch vom Ort selbst ab

$$\pi_r = \pi_r(\dot{\phi}_r, \nabla \phi_r, \phi_r, x). \quad (2.23)$$

Wir gehen davon aus, dass (2.23) invertierbar ist, sodass wir

$$\dot{\phi}_r = \dot{\phi}_r(\pi_r, \nabla \phi_r, \phi_r, x) \quad (2.24)$$

erhalten. Aus diesen Relationen lässt sich eine **Hamiltondichte** \mathcal{H} formulieren,

$$\mathcal{H} = \sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L}(\phi_r, \dot{\phi}_r) = \dot{\phi}_r(\pi_r, \nabla \phi_r, \phi_r, x). \quad (2.25)$$

Um aus der Hamiltondichte Bewegungsgleichungen zu erhalten, berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_r} &= \dot{\phi}_r + \sum_s \pi_s \frac{\partial \dot{\phi}_s}{\partial \pi_r} - \sum_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_s} \frac{\partial \dot{\phi}_s}{\partial \pi_r} \\ &= \dot{\phi}_r + \underbrace{\sum_s \left(\pi_s - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_s} \right) \frac{\partial \dot{\phi}_s}{\partial \pi_r}}_{=0} \end{aligned}$$

höhere Ordnungen systematisch und eindeutig. Daher gibt es feste Regeln, nach denen man ein Feynman-Diagramm in ein Element der Streumatrix in der Form (5.11) umschreiben kann und umgekehrt. Dies erspart eine explizite Rechnung. Dabei lauten die Feynman-Regeln wie folgt:

- Die Übergangsamplitude $\langle i | \rightarrow | f \rangle$ ist durch eine Störungsreihe

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \delta_{fi} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{fi}^{(n)} \quad (5.13)$$

gegeben.

- In der Ordnung $S_{fi}^{(n)}$ treten alle topologisch verschiedenen Feynman-Diagramme n -ter Ordnung (n Vertizes) auf. Jedes dieser Feynman-Diagramme ergibt eine Teilamplitude $S_{fi,m}^{(n)}$ mit

$$S_{fi}^{(n)} = \sum_m S_{fi,m}^{(n)}. \quad (5.14)$$

Die Teilamplitude lässt sich nach folgenden Regeln aus dem Diagramm auslesen, wobei alle Terme multiplikativ auftreten. Die Terme innerer Fermionenlinien werden entgegen der Pfeilrichtung aus dem Diagramm abgelesen und dann von links nach rechts geschrieben.

- Elektron

$$\begin{aligned} & \text{Diagramm: Ein Pfeil, der von links unten nach rechts oben zeigt.} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \sqrt{\frac{m c^2}{E_k}} \underline{u}(\mathbf{k}, s) \quad \text{einlaufend} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Diagramm: Ein Pfeil, der von links oben nach rechts unten zeigt.} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \sqrt{\frac{m c^2}{E_k}} \underline{\bar{u}}(\mathbf{k}, s) \quad \text{auslaufend} \end{aligned}$$

- Positron

$$\begin{aligned} & \text{Diagramm: Ein Pfeil, der von links oben nach rechts unten zeigt.} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \sqrt{\frac{m c^2}{E_k}} \underline{v}(\mathbf{k}, s) \quad \text{einlaufend} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Diagramm: Ein Pfeil, der von links unten nach rechts oben zeigt.} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \sqrt{\frac{m c^2}{E_k}} \underline{\bar{v}}(\mathbf{k}, s) \quad \text{auslaufend} \end{aligned}$$

- Photon

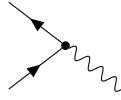
$$\begin{aligned} & \text{Diagramm: Eine Wellenlinie.} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \sqrt{\frac{\hbar \mu_0 c^2}{2\omega k}} \epsilon_\alpha(\mathbf{k}, \lambda) \end{aligned}$$

- Vertex = $-\frac{ie}{\hbar} (2\pi)^4 \gamma^\alpha \delta^{(4)}(\sum_{i,\text{ausl.}} k_i - \sum_{i,\text{eintr.}} k_i)$

- Innere Fermionenlinie

$$\begin{aligned} & \text{Diagramm: Zwei Punkte, die durch eine Wellenlinie verbunden sind.} \\ & = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{S}_F(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} K_{\mu\nu} k^\mu - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon, \end{aligned}$$

wobei die Impulse gegebenenfalls nicht durch ein- und auslaufende Zustände festgelegt sind.



b) Energie- und Impulserhaltung Dass es geeignete Anfangs- und Endzustände gibt, heißt noch nicht, dass der Beispielprozess auch existiert. Das Matrixelement muss ungleich Null sein. Eine explizite Rechnung (vgl. Übungen) für einen ähnlichen Prozess liefert

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | d(\mathbf{k}'_3, s'_3) b(\mathbf{k}'_2, s'_2) (-ie/\hbar) \int \bar{\psi}_{b^+} \gamma^\alpha \underline{\psi}_{d^+} A_{\alpha\alpha} d^4x |a^+ (\mathbf{k}_1, \lambda_1) |0\rangle \\
 & = \frac{-ie m c^3 \sqrt{\mu_0}}{4\pi\hbar E_{k_3} E_{k_2} \omega_{k_1}} \delta^{(4)}(\mathbf{k}'_3 + \mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_1) .
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

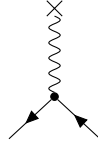
Die δ -Funktion fordert die Erhaltung des Viererimpulses am Vertex (also die Energie- und Impulserhaltung). Im vorliegenden Fall lässt sich beides nicht gleichzeitig erfüllen. Gleiches gilt für alle acht Prozesse aus (5.7), das heißt alle Prozesse erster Ordnung existieren in der Natur nicht.

5.3.3 Externe elektromagnetische Felder

In Fällen, in denen das elektromagnetische Feld in guter Näherung als äußeres klassisches Feld behandelt werden kann, sind Prozesse erster Ordnung möglich, zum Beispiel die Mott-Streuung

$$S^{(1)} = (-ie/\hbar) \int \bar{\psi}_{b^+} \gamma^\alpha A_\alpha(\mathbf{r}) \underline{\psi}_b d^4x , \tag{5.12}$$

wobei hier ein klassisches Viererpotential der Form $A = (\phi/c, 0, 0, 0)$ angenommen wird.



Hierbei handelt es sich im eigentlichen Sinne um keinen Prozess erster Ordnung, da die Annahme eines klassischen Feldes nur dann gerechtfertigt ist, sofern eine hohe Anzahl von Photonen vorliegt. In der ersten Ordnung ist jedoch nur ein Photon involviert.

5.4 Feynman-Regeln

Gleichung (5.11) lässt erkennen, welche Ausdrücke aus den Feldoperatoren nach Auswertung aller Integrale im Ergebnis auftreten. Die Feldoperatoren können nach (5.2) jedoch einzelnen Ausdrücken aus den Feynman-Diagrammen zugeordnet werden. Das funktioniert auch für

oder

$$\dot{\phi}_r = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_r} . \tag{2.26}$$

Weiterhin wollen wir die Hamiltondichte nach den Feldern ableiten und erhalten

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_r} & \stackrel{(2.25)}{=} \sum_s \pi_s \frac{\partial \dot{\phi}_s}{\partial \phi_r} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \sum_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_s} \frac{\partial \dot{\phi}_s}{\partial \phi_r} \\
 & \stackrel{(2.22)}{=} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \stackrel{(2.21)}{=} -\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \\
 & = - \frac{\partial (ct)}{\partial} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,ct}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,i}} \\
 & = -\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,i}} \\
 & \stackrel{(2.22)}{=} -\dot{\pi}_r - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,i}} ,
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

wobei sich der letzte Term in (2.27) noch wie folgt umschreiben lässt.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_{r,i}} = \sum_r \pi_r \frac{\partial \dot{\phi}_r}{\partial \phi_{r,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,i}} - \sum_s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_s} \frac{\partial \dot{\phi}_s}{\partial \phi_{r,i}} \stackrel{(2.22)}{=} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,i}} . \tag{2.28}$$

Wir erhalten damit für die zeitliche Ableitung der Impulsdichte

$$\dot{\pi}_r \stackrel{(2.27)}{=} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_r} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}^i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_{r,i}} . \tag{2.29}$$

Zusammengefasst ergeben sich die **Hamiltonschen Bewegungsgleichungen** erster Ordnung für die Felder, welche wie folgt lauten

$$\boxed{\pi_r = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\phi}_r} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}^i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\phi}_{r,i}} , \quad \dot{\phi}_r = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_r}} \tag{2.30}$$

2.3 Feldquantisierung

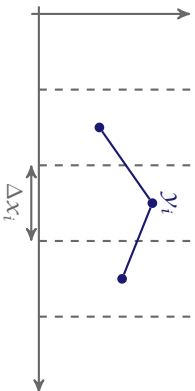
2.3.1 Zurück zum mechanischen Beispiel

Wir teilen die Saite in diskrete Massepunkte auf, vergleiche Abbildung 5.

$$y_i(t) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} dx y(x, t) \stackrel{\Delta x \rightarrow 0}{\approx} y(x_i, t) \tag{2.31}$$

Analog folgt für die Impulse

$$p_i(t) = \int_{\Delta x_i} dx \pi(x, t) \stackrel{\Delta x \rightarrow 0}{\approx} \pi(x_i, t) \Delta x_i . \tag{2.32}$$



► 5 Saite dargestellt durch diskrete Massen.

mit der Impulsdichte $\pi(x, t) = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$. Im Sinn der kanonischen Bewegungsgleichungen gehen wir zu Operatoren über

$$\hat{y}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} dx \hat{y}(x, t) \approx \hat{y}(x_i, t), \tag{2.33}$$

$$\hat{p}_i = \int_{\Delta x_i} dx \hat{\pi}(x, t) \approx \hat{\pi}(x_i, t) \Delta x_i. \tag{2.34}$$

Für die diskreten Variablen lässt sich die Quantisierung über die Forderung der Vertauschungsregeln

$$\boxed{[\hat{y}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad [\hat{y}_i, \hat{y}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0} \tag{2.35}$$

einführen.

Für das Beispiel der schwingenden Saite erhalten wir im Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$

$$0 = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] \stackrel{(2.34)}{=} [\hat{\pi}(x_i, t), \hat{\pi}(x_j, t)] \Delta x_i \cdot \Delta x_j = 0,$$

also

$$[\hat{\pi}(x_i, t), \hat{\pi}(x_j, t)] = 0 \tag{2.36}$$

und durch analoges Vorgehen

$$[\hat{y}(x_i, t), \hat{y}(x_j, t)] = 0. \tag{2.37}$$

Die Bedingung in (2.35) fordert

$$[\hat{y}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \stackrel{(2.33)}{\stackrel{(2.34)}}{=} [\hat{y}(x_i, t), \hat{\pi}(x_j, t)] \Delta x_j = \delta_{ij} i\hbar$$

und ist für den Grenzfall $\Delta x_j \rightarrow 0$ genau dann erfüllt, wenn gilt

$$[\hat{y}(x_i, t), \hat{\pi}(x_j, t)] = i\hbar \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{\delta_{ij}}{\Delta x_j} = i\hbar \delta(x_i - x_j), \tag{2.38}$$

denn

$$\int_{\Delta x} dx f(x) \frac{\delta_{ij}}{\Delta x_j} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} \int dx f(x) \Delta x^{-0} f(x) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{2.39}$$

$$-(ie/\hbar) \int \bar{\psi}_a \gamma^\alpha A_{\alpha\beta} \psi_b d^4x$$

$$-(ie/\hbar) \int : \bar{\psi}_a \gamma^\alpha \psi_{d^+} : A_{\alpha\beta} d^4x$$

$$-(ie/\hbar) \int A_{\alpha\beta} \bar{\psi}_a \gamma^\alpha \psi_b d^4x$$

$$-(ie/\hbar) \int A_{\alpha\beta} \bar{\psi}_a \gamma^\alpha \psi_{d^+} : d^4x \tag{5.7}$$

5.3.2 Verschwinden der Matrixelemente

a) Anfangs- und Endzustände Ein konkretes Matrixelement

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle$$

verschwindet nur dann nicht, wenn $|i\rangle$ und $|f\rangle$ die Teilchen enthalten, die in (5.7) erzeugt oder vernichtet werden. Als Beispiel betrachten wir die Zustände

$$|i\rangle = a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1) |0\rangle \tag{5.8a}$$

$$|f\rangle = b^\dagger(\mathbf{k}'_2, s'_2) d^\dagger(\mathbf{k}'_3, s'_3) |0\rangle. \tag{5.8b}$$

Dabei verbleibt nur der zweite Term aus (5.7). Er enthält die Operatoren $b^\dagger d^\dagger a$ und damit

$$\underbrace{\langle 0 | db}_{|f\rangle} (d^\dagger b^\dagger a) \underbrace{a^\dagger |0\rangle}_{|i\rangle} \neq 0 \tag{5.9}$$

für geeignete k, λ und s . Betrachten wir hingegen den ersten Term aus (5.7), so enthält dieser das Matrixelement

$$\langle 0 | db (b^\dagger a b) a^\dagger |0\rangle = 0, \tag{5.10}$$

wobei das Ergebnis trivial zu sehen ist, denn die Operatoren a^\dagger und b vertauschen und somit wenden wir einen Vernichtungsoperator auf den Vakuumzustand an.

Der zweite Prozess aus Gleichung (5.9) heißt Paarzeugung, dabei verwandelt sich ein Photon in ein Elektron-Positron-Paar.

5.3 Ein Prozess erster Ordnung

5.3.1 Beitrag zur Streumatrix

Im Folgenden wollen wir die erste Ordnung der Streumatrix

$$S^{(1)} \stackrel{(5.4a)}{=} -\frac{ie}{\hbar} \int d^4x: \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x):$$

näher betrachten. Dazu definieren wir zunächst folgende Abkürzungen:

$$\underline{\psi}_b = \sum_{s=1,1} d^3k \int \frac{mc^2}{\sqrt{2\pi^3}} b(\mathbf{k}, s) \underline{u}(\mathbf{k}, s) e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (5.6a)$$

$$\bar{\psi}_{b^\dagger} = \sum_{s=1,1} d^3k \int \frac{mc^2}{\sqrt{2\pi^3}} b^\dagger(\mathbf{k}, s) \bar{u}(\mathbf{k}, s) e^{ik_\mu x^\mu} \quad (5.6b)$$

$$\underline{\psi}_{d^\dagger} = \sum_{s=1,1} d^3k \int \frac{mc^2}{\sqrt{2\pi^3}} d^\dagger(\mathbf{k}, s) \underline{v}(\mathbf{k}, s) e^{ik_\mu x^\mu} \quad (5.6c)$$

$$\bar{\psi}_d = \sum_{s=1,1} d^3k \int \frac{mc^2}{\sqrt{2\pi^3}} d(\mathbf{k}, s) \bar{v}(\mathbf{k}, s) e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (5.6d)$$

$$A_{a\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar\mu_0 c^2}{(2\pi)^3}} \sum_\lambda \int d^3k \frac{\varepsilon_\alpha(\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k}} a(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (5.6e)$$

$$A_{a^\dagger\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar\mu_0 c^2}{(2\pi)^3}} \sum_\lambda \int d^3k \frac{\varepsilon_\alpha(\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k}} a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{ik_\mu x^\mu} \quad (5.6f)$$

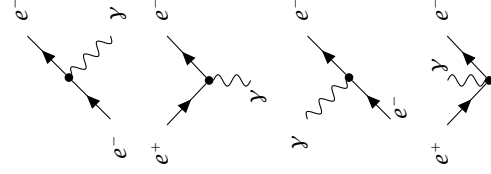
Alle Operatoren treten in (5.4a) am selben Raum-Zeit-Punkt auf, das heißt es gibt nur einen Vertex. Allgemein gilt, dass in der Ordnung n aus (5.3) n Integrationsvariablen x^μ vorkommen und damit n Vertizes. Damit findet man

$$S^{(1)} \stackrel{(5.4a)}{=} - (ie/\hbar) \int \bar{\psi}_{b^\dagger} \gamma^\alpha A_{a\alpha} \underline{\psi}_b d^4x$$

$$- (ie/\hbar) \int \bar{\psi}_{b^\dagger} \gamma^\alpha \underline{\psi}_{d^\dagger} A_{a\alpha} d^4x$$

$$- (ie/\hbar) \int \bar{\psi}_{b^\dagger} \gamma^\alpha A_{a^\dagger\alpha} \underline{\psi}_b d^4x$$

$$- (ie/\hbar) \int \bar{\psi}_{b^\dagger} \gamma^\alpha A_{a^\dagger\alpha} \underline{\psi}_{d^\dagger} d^4x$$



2.3.2 Verallgemeinerung

In Verallgemeinerung zum Beispiel der schwingenden Saite führt man die Quantisierung ein, indem man für Felder ϕ_r und ihre Impulsdichte π_s postuliert

$$[\phi_r(\mathbf{r}, t), \pi_s(\mathbf{r}', t)] = i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{rs}, \quad (2.40)$$

$$[\phi_r(\mathbf{r}, t), \phi_s(\mathbf{r}', t)] = [\pi_r(\mathbf{r}, t), \pi_s(\mathbf{r}', t)] = 0. \quad (2.41)$$

Dies ist die *kanonische Quantisierung* und enthält die bosonischen Vertauschungsregeln, die – wie der Name schon sagt – auf Bosonen führen werden. Später werden wir sehen, dass noch andere Regeln benötigt werden, um eine sinnvolle physikalische Aussage zu erhalten.

2.4 Symmetrien und Erhaltungssätze

Wir nehmen an, dass es eine kontinuierliche Symmetrie gibt, welche die Wirkung invariant lässt

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu, \quad (2.42)$$

$$\phi_r(x^\mu) \rightarrow \phi'_r(x'^\mu), \quad (2.43)$$

$$\int d^4x \mathcal{L}(\phi'_r, \partial'_\mu \phi'_r, x') = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r, x). \quad (2.44)$$

Dann lässt sich die Relation

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} d\phi_r - \left(\frac{\mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \phi_{r,\nu} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right) dx^\nu \right] = 0 \quad (2.45)$$

ableiten, wobei gilt

$$d\phi_r = \phi'_r(x') - \phi_r(x), \quad (2.46)$$

$$dx^\mu = x'^\mu - x^\mu. \quad (2.47)$$

Dies ist das *Noether-Theorem*.

- ▶ Externe statische (waagrecht im Diagramm) Felder sind durch Wellenlinien mit einem Kreuz am Ende gekennzeichnet:

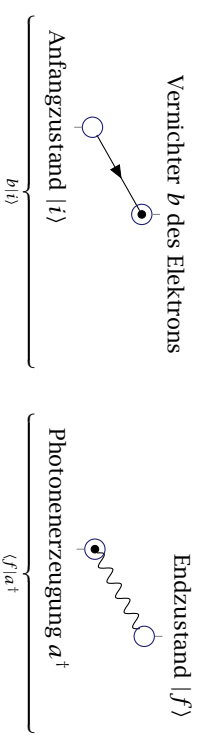


- ▶ Das Erzeugen und Vernichten von Teilchen, also das Auftreten der Operatoren a , a^\dagger , b , b^\dagger , d , d^\dagger wird durch einen Punkt (Vertex) gekennzeichnet:

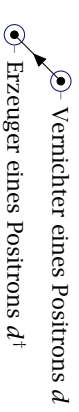


Mit diesen elementaren Bausteinen kann man folgende Situationen beschreiben:

- ▶ Ein- und auslaufendes Teilchen, also freie Teilchen bei $t = \pm \infty$ haben nur auf einer Seite einen Vertex. Zum Beispiel ein einlaufendes Elektron und auslaufendes Positron



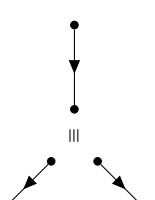
- ▶ Sogenannte innere Linien, Linien mit zwei Vertizes beschreiben ein Teilchen, das in einem Prozess erzeugt und anschließend in einem weiteren vernichtet wird



Innere Linien beschreiben Teilchen, welche nach außen nicht auftreten können - sie werden virtuelle Teilchen genannt. Sie treten in Kontraktionen auf, zum Beispiel

$$\overline{\psi} \psi \stackrel{(4.50)}{=} 1S_F.$$

Diese enthalten immer die Propagationen von Teilchen und Antiteilchen, daher stellt man sie im Diagramm ohne Zeitrichtung dar.



5.1.2 Rechtfertigung der Störungsreihe

Für jede Ordnung ergibt sich in grober Näherung

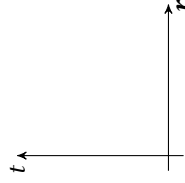
$$e/\hbar \int d^4x: \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x): \approx \sqrt{\alpha} \tag{5.5}$$

mit der Feinstrukturkonstanten $\alpha \approx \frac{1}{137}$. Wie wir später sehen werden, trägt nur jede zweite Ordnung zu den Übergangsamplituden bei, sodass die Störungsreihe (5.3) einer Entwicklung nach der kleinen Zahl $\frac{1}{137}$ entspricht.

5.2 Feynman-Diagramme

Die Aufgabe der QED besteht nun darin, die einzelnen Ordnungen der Störungsreihe aus (5.3) auszuwerten, um damit physikalische Prozesse zu erklären. Dabei sind aufgrund von 3n Feldoperatoren in n-ter Ordnung, 2 Erzeugern oder Vernichtern in den Modenentwicklungen (3.46) und (3.70a) und der Zeitordnung viele Terme zu erwarten. Bei deren Sortierung ist eine graphische Darstellung in Feynmandiagrammen hilfreich.

Die typische Auftragung erfolgt in Raum-Zeit-Diagrammen,



wobei diese Achsen eigentlich nie gezeichnet werden.

In den Feynman-Diagrammen treten folgende Symbole auf:

- ▶ Elektronen als durchgezogene Linien mit Pfeil in positiver Zeitrichtung:



- ▶ Positronen als durchgezogene Linien, allerdings mit Pfeil in negativer Zeitrichtung in Anlehnung an die Feynman-Stückelberg Interpretation:



- ▶ Photonen als gewellte Linien (ohne Pfeil, da es keine unabhängigen Antiteilchen gibt):



3

Quantisierung freier relativistischer Felder

3-1 Klein-Gordon-Feld

3-1.1 Motivation der Herangehensweise

Im vorherigen Abschnitt wurde eine „Wunschliste“ an die Theorie für die Elementarteilchen erstellt. Darin forderten wir eine einheitliche Beschreibung mit der Elektrodynamik. Eine Quantisierung der elektrischen und magnetischen Felder (Photonen) gelingt, indem man die Feldvektoren nach Gleichung (2.40) und (2.41) durch Operatoren ersetzt.

Ansatz Ersetze auch das Feld ψ der Klein-Gordon-Gleichung durch Operatoren, dies führt auf eine Quantisierung. \rightarrow

Allerdings ψ entstammt bereits einer Gleichung einer Quantentheorie, dies führt auf den Begriff der *zweiten Quantisierung*. \rightarrow

Frage Wird hier tatsächlich zum zweiten Mal quantisiert? \rightarrow

Nein, die Quantisierung in der Klein-Gordon-Gleichung oder auch der Schrödingergleichung erfolgt erst durch die Suche nach konkreten Lösungen für ein gegebenes Problem (Potential), die die geforderte Nebenbedingungen (Normierbarkeit) erfüllen. Wir gehen genau von diesen Lösungen aus, stellen keine neuen Bedingungen, sondern erlauben nur eine mehrfache Besetzung dieser Lösungen und erhalten eine Vielteilchengleichung. Dies stellt einen anderen Ansatz dar, die Quantisierung zu verstehen, jedoch keine tatsächliche zweite Quantisierung eines quantenmechanischen Ergebnisses ψ .

3-1.2 Kanonische Variablen

Für die Quantisierung nach Gleichung (2.40) werden kanonische Variablen benötigt. Dafür führen wir die Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\hbar^2}{2m} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi^*) - \frac{mc^2}{2} \phi \phi^* \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \phi_{,\mu} \phi^{*\mu} - \frac{mc^2}{2} \phi \phi^* \end{aligned} \tag{3.1}$$

für das komplexe Feld ϕ ein. Es beschreibt dabei zwei unabhängige, reelle Felder,

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2,$$

d.h. entsprechend können ϕ und ϕ^* als unabhängige Felder aufgefasst werden. Die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(3.21)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*_{,\alpha}} \\ &\stackrel{(3.1)}{=} -\frac{m c^2}{2} \phi - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_\alpha \eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \phi \\ &= -\frac{m c^2}{2} \phi - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_\mu \partial^\mu \phi \end{aligned}$$

oder

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^2 \right] \phi = 0. \quad (3.2)$$

Weiterhin:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \\ &= -\frac{m c^2}{2} \phi^* - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_\mu \partial^\mu \phi^*, \\ 0 &= \left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^2 \right] \phi^*. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wir erhalten die Klein-Gordon-Gleichung und ihr komplex konjugiertes. Damit ist \mathcal{L} also geeignet, um das *Klein-Gordon-Feld* zu beschreiben.

Führen wir nun die Impulsdichten über

$$\mathcal{L} \stackrel{(3.1)}{=} \frac{\hbar^2}{2m c^2} \dot{\phi} \dot{\phi}^* - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \phi)(\nabla \phi^*) - \frac{m c^2}{2} \phi \phi^*, \quad (3.4a)$$

$$\pi \stackrel{(3.22)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\hbar^2}{2m c^2} \dot{\phi}^*, \quad (3.4b)$$

$$\pi^* \stackrel{(3.22)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \frac{\hbar^2}{2m c^2} \dot{\phi} \quad (3.4c)$$

ein. Eine Umkehrung ergibt

$$\dot{\phi}^* \stackrel{(3.4a)}{=} \frac{2m c^2}{\hbar^2} \pi, \quad (3.5a)$$

$$\dot{\phi} \stackrel{(3.4b)}{=} \frac{2m c^2}{\hbar^2} \pi^*. \quad (3.5b)$$

Damit wird die Hamiltondichte zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\stackrel{(3.23)}{=} \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L} \\ &= \frac{2m c^2}{\hbar^2} \pi \pi^* + \frac{2m c^2}{\hbar^2} \pi^* \pi - \frac{2m c^2}{\hbar^2} \pi^* \pi + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \phi)(\nabla \phi^*) + \frac{m c^2}{2} \phi \phi^* \\ &= \frac{2m c^2}{2} \pi \pi^* + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \phi)(\nabla \phi^*) + \frac{m c^2}{2} \phi \phi^*. \end{aligned} \quad (3.6)$$

5 Quantenelektrodynamik

5.1 Wechselwirkungsterm

5.1.1 Streumatrix

Die Quantenelektrodynamik behandelt die Wechselwirkung von Teilchen der Dirac-Gleichung (Elektronen, Positronen) mit dem Maxwellfeld (Photonen). Ausgangspunkt ist hierbei die Lagrangendichte (4.4), insbesondere der Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_I = -c e \bar{\psi} \gamma^\mu \underline{\psi} A_\mu := -c e \bar{\psi} \underline{A} \psi; \quad (5.1)$$

mit den Feldoperatoren

$$\begin{aligned} \underline{\psi} &= \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\pi^3}} \sqrt{\frac{m c^2}{E_k}} \left\{ b(\mathbf{k}, s) \underline{u}(\mathbf{k}, s) e^{-ik_\mu x^\mu} + d^\dagger \underline{v}(\mathbf{k}, s) e^{ik_\mu x^\mu} \right\}, \\ A^\mu &= \sqrt{\frac{\hbar \mu_0 c^2}{(2\pi)^3}} \sum_{\lambda} \int d^3 k \frac{\epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k}} \left\{ a(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ik_\mu x^\mu} + a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{ik_\mu x^\mu} \right\} \end{aligned}$$

und der Ladung $q = e = -e_0 < 0$. Wir finden also für den Hamiltonoperator der Wechselwirkung

$$:H_I: = \int : \mathcal{H}_I : d^3 r = c e \int : \bar{\psi} \underline{A} \psi : d^3 r. \quad (5.2)$$

Damit lautet die Streumatrix der QED

$$\begin{aligned} S &= T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} :H_I: dt / \hbar} \\ &= T e^{-i \int : \mathcal{H}_I : d^4 x / (\hbar)} \\ &\stackrel{(5.2)}{=} T e^{-i e \int : \bar{\psi} \underline{A} \psi : d^4 x / \hbar} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i e}{\hbar} \right)^n T \prod_{i=1}^n \int d^4 x_i : \bar{\psi}(x_i) \underline{A}(x_i) \psi(x_i) : \\ &\quad \prod_{i=1}^n \int d^4 x_i : \bar{\psi}(x_i) \underline{A}(x_i) \psi(x_i) : \end{aligned} \quad (5.3)$$

sowie die Terme erster und zweiter Ordnung

$$S^{(1)} = -\frac{i e}{\hbar} \int d^4 x : \bar{\psi}(x) \underline{A}(x) \psi(x) :, \quad (5.4a)$$

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \left(-\frac{i e}{\hbar} \right)^2 T \int d^4 x_1 d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \underline{A}(x_1) \psi(x_1) : : \bar{\psi}(x_2) \underline{A}(x_2) \psi(x_2) :. \quad (5.4b)$$

3.1.3 Quantisierung der Klein-Gordon-Gleichung

Eine Quantisierung erfolgt durch den Übergang zu Operatoren

$$\pi, \pi^*, \phi, \phi^* \rightarrow \hat{\pi}, \hat{\pi}^\dagger, \hat{\phi}, \hat{\phi}^\dagger, \quad (3.7)$$

die die Vertauschungsrelationen (2.40) und (2.41) erfüllen, also explizit

$$[\phi, \phi] = [\phi, \phi^\dagger] = [\phi^\dagger, \phi^\dagger] = [\pi, \pi] = [\pi, \pi^\dagger] = [\pi^\dagger, \pi^\dagger] = 0, \quad (3.8a)$$

$$[\phi, \pi^\dagger] = [\phi^\dagger, \pi] = 0, \quad (3.8b)$$

$$[\phi(\mathbf{r}), \pi(\mathbf{r}')] = [\phi^\dagger(\mathbf{r}), \pi^\dagger(\mathbf{r}')] = i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.8c)$$

Die Ersetzung (3.7) zusammen mit (??) und (3.5a) ergibt, dass auch die Feldoperatoren $\hat{\phi}$, $\hat{\pi} \propto \hat{\phi}^\dagger$ die Klein-Gordon-Gleichung (3.2) und (3.3) erfüllen müssen.

Ein geeignetes Vorgehen besteht darin, die Feldoperatoren nach den Lösungen der freien Klein-Gordon-Gleichung zu entwickeln.

$$\phi_k \propto e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar} \quad (3.9a)$$

Verwende die Basisfunktionen

$$f_k = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2E(\mathbf{k})}} e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (3.9b)$$

mit den Orthogonalitätsrelationen

$$\int f_k^*(\mathbf{r}, t) i\overleftrightarrow{\partial}_t f_{k'}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (3.10a)$$

$$\int f_k^{(*)}(\mathbf{r}, t) i\overleftrightarrow{\partial}_t f_{k'}^{(*)}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = 0 \quad (3.10b)$$

mit

$$a\overleftrightarrow{\partial}_t b = a\partial_t b - (\partial_t a)b. \quad (3.10c)$$

Damit

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{2mc^2}{\hbar} \int (\hat{a}_k f_k(\mathbf{r}, t) + \hat{c}_k^\dagger f_k^*(\mathbf{r}, t)) d^3\mathbf{k}, \quad (3.11a)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \frac{2mc^2}{\hbar} \int (\hat{a}_k^\dagger f_k^*(\mathbf{r}, t) + \hat{c}_k f_k(\mathbf{r}, t)) d^3\mathbf{k}, \quad (3.11b)$$

wobei die Operatoreigenschaft nun von den Entwicklungskoeffizienten \hat{a}_k und \hat{c}_k getragen werden muss. Unter Verwendung von Gleichung (3.10a) bis (3.10c) erhält man die Umkehrung

$$\hat{a}_k = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mc^2}} \int f_k^*(\mathbf{r}, t) i\overleftrightarrow{\partial}_t \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}, \quad (3.12a)$$

$$\hat{c}_k = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mc^2}} \int f_k^*(\mathbf{r}, t) i\overleftrightarrow{\partial}_t \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}, \quad (3.12b)$$

$$\hat{a}_k^\dagger = -\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mc^2}} \int f_k(\mathbf{r}, t) i\overleftrightarrow{\partial}_t \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}, \quad (3.12c)$$

$$\hat{c}_k^\dagger = -\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mc^2}} \int f_k(\mathbf{r}, t) i\overleftrightarrow{\partial}_t \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}. \quad (3.12d)$$

Damit lassen sich die Kommutatorregeln für die Operatoren \hat{a} und \hat{c} finden,

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] &\stackrel{(3.12a)}{=} \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' \left\{ f_k^*(\mathbf{r}, t) f_k(\mathbf{r}', t) \underbrace{[\partial_t \hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \partial_t \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', t)]}_{\stackrel{\infty[\hat{\pi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}(\mathbf{r}', t)] = 0}{= 0}} \right. \\
 &\quad - (\partial_t f_k^*(\mathbf{r}, t)) f_k(\mathbf{r}', t) \underbrace{[\hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \partial_t \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', t)]}_{\stackrel{= \frac{2\hbar m c^2}{\hbar^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{= 0}} \\
 &\quad \left. - f_k^*(\mathbf{r}, t) (\partial_t f_k(\mathbf{r}', t)) \underbrace{[\partial_t \hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', t)]}_{\stackrel{= -\frac{2\hbar m c^2}{\hbar^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{= 0}} \right. \\
 &\quad \left. + (\partial_t f_k^*(\mathbf{r}, t)) (\partial_t f_k(\mathbf{r}', t)) \underbrace{[\hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}', t)]}_{= 0} \right\}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] = \int d^3\mathbf{r} f_k^*(\mathbf{r}, t) i \partial_t f_k(\mathbf{r}, t) \stackrel{(3.10b)}{=} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{3.13a}$$

Analog findet man

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_k, \hat{a}_k] &= [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k^\dagger] = 0, & (3.13b) \\
 [\hat{c}_k, \hat{c}_k^\dagger] &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), & (3.13c) \\
 [\hat{c}_k, \hat{c}_k] &= [\hat{c}_k^\dagger, \hat{c}_k^\dagger] = 0. & (3.13d)
 \end{aligned}$$

Die Operatoren \hat{a}_k und \hat{c}_k sind also Vernichter der Moden \mathbf{k} mit + oder - im Exponenten. Demnach sind \hat{a}_k^\dagger und \hat{c}_k^\dagger die zugehörigen Erzeuger.

3.1.4 Eigenzustände des Hamiltonoperators und deren Interpretation

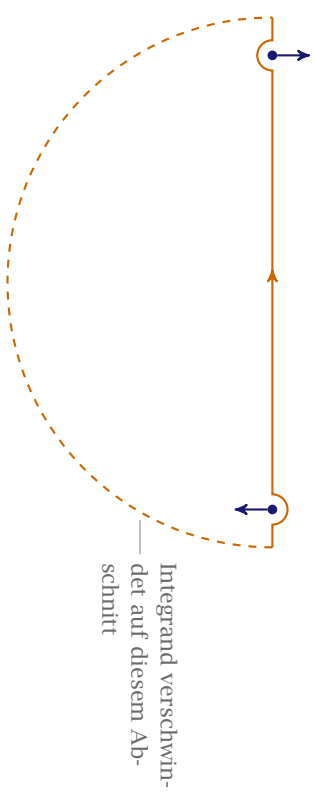
a) Hamiltonoperator: Mit den Feldoperatoren (3.11a) und (3.11b) und den zugehörigen Impulsdichten

$$\begin{aligned}
 \hat{\pi}(\mathbf{r}, t) &\stackrel{(3.4b)}{=} \frac{\hbar^2}{2m c^2} \partial_t \hat{\phi}^\dagger, \\
 &= i \sqrt{\frac{\hbar}{2m c^2}} \int d^3\mathbf{k} E(\mathbf{k}) \{ \hat{a}_k^\dagger f_k^*(\mathbf{r}, t) - \hat{c}_k f_k(\mathbf{r}, t) \} & (3.14a)
 \end{aligned}$$

$$\hat{\pi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = -i \sqrt{\frac{\hbar}{2m c^2}} \int d^3\mathbf{k} E(\mathbf{k}) \{ \hat{a}_k f_k(\mathbf{r}, t) - \hat{c}_k^\dagger f_k^*(\mathbf{r}, t) \} \tag{3.14b}$$

und

$$E(\mathbf{k}) = +\sqrt{\hbar^2 \mathbf{k}^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{3.15}$$



► 9 Neuer Integrationsweg

$$\int_{c_1} \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} dk_0}{k_\mu k^\mu - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} dk_0}{k_\mu k^\mu - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon} \tag{4.47}$$

und es folgt

$$-i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} E(\mathbf{k}) \frac{m c^2}{e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)}} \stackrel{(4.46)}{=} \frac{2}{(4.47)} \frac{m c}{\hbar} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)}}{k_\mu k^\mu - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon}. \tag{4.48}$$

Für den zweiten Summanden mit dem Term $\Theta(t' - t)$ findet man *exakt dieselbe* Darstellung, man kann also ohne Einschränkung der Θ -Funktionen schreiben

$$\Delta_F(x - x') \stackrel{(4.48)}{=} \frac{2}{(4.44)} \frac{m c}{\hbar} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)}}{k_\mu k^\mu - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon} \tag{4.49}$$

Der $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ wird oft nicht geschrieben, ist aber immer im Hinterkopf zu behalten!

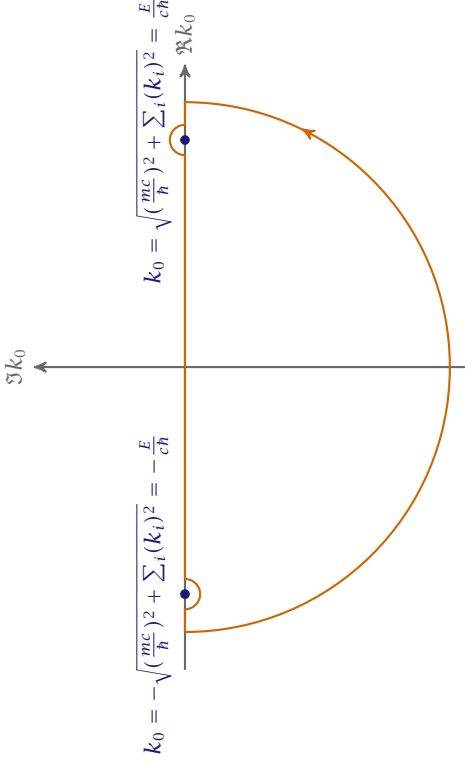
4.3.2 Dirac- und Maxwellfeld

Vollkommen analog kann man Propagatoren für das Diracfeld aufstellen

$$\begin{aligned}
 S_F(x - x') &= -i \overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(x')} \\
 &= -i \langle 0 | \underline{\psi}(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle \\
 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k + \frac{m c}{\hbar}}{k_\mu k^\mu - \left(\frac{m c}{\hbar}\right)^2 + i\epsilon}. & (4.50)
 \end{aligned}$$

Für das Maxwellfeld, das heißt für den Photonpropagator, ergibt sich

$$F_{F_{\kappa\beta}}(x - x') = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\hbar \mu_0 c}{k_\mu k^\mu + i\epsilon} e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \eta_{\kappa\beta} + \text{ Eichterm}. \tag{4.51}$$



► 8 Integrationsweg von c_1 der den Pol bei E/ch enthält.

Indem wir den Nenner etwas umschreiben, können wir die Polstellen verdeutlichen

$$k_\mu k^\mu - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 = \left(k_0 - \sqrt{(k_i)^2 + (mc/\hbar)^2}\right) \left(k_0 + \sqrt{(k_i)^2 + (mc/\hbar)^2}\right).$$

Das Ergebnis des Integrals, das sich für den Weg aus Abbildung 8 ergibt, ist dann das Residuum für den Pol bei E/ch .

$$\begin{aligned} \int_{c_1} \frac{e^{-ik_0(x^0-x'^0)} e^{ik_i(x^i-x'^i)}}{k_\mu k^\mu - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2} dk_0 &= \frac{2\pi i}{k_0 + \sqrt{(k_i)^2 + (mc/\hbar)^2}} e^{-ik_0(x^0-x'^0)} e^{-ik_i(x^i-x'^i)} \\ &= 2\pi i \frac{e^{-ik_\mu(x^\mu-x'^\mu)}}{2k_0} = \frac{2\pi i}{2} c\hbar \frac{e^{-ik_\mu(x^\mu-x'^\mu)}}{E(\mathbf{k})}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

oder anders ausgedrückt

$$-\frac{2mc}{\hbar} \int_{c_1} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik_\mu(x^\mu-x'^\mu)}}{k_\mu k^\mu - (mc/\hbar)^2} \stackrel{(4.45)}{=} -i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{mc^2}{E(\mathbf{k})} e^{-ik_\mu(x^\mu-x'^\mu)}. \quad (4.46)$$

Nun kann man den Integrationsweg noch vereinfachen, indem man die Pole infinitesimal in der imaginären Ebene verschiebt (siehe Abbildung 9),

$$\begin{aligned} &\left(k_0 - \sqrt{(k_i)^2 + (mc/\hbar)^2} + \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{(k_i)^2 + (mc/\hbar)^2}}\right) \times \\ &\left(k_0 + \sqrt{(k_i)^2 + (mc/\hbar)^2} - \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{(k_i)^2 + (mc/\hbar)^2}}\right) \\ &= k_0^2 - k_i k^i + (mc/\hbar)^2 + i\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Kontur c_1

lässt sich die Hamiltondichte explizit in der Modenentwicklung angeben.

$$\mathcal{H} \stackrel{(3.6)}{=} \frac{2mc^2}{\hbar^2} \hat{\pi} \hat{\pi}^\dagger + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \hat{\phi}) (\nabla \hat{\phi}^\dagger) + \frac{mc^2}{2} \hat{\phi} \hat{\phi}^\dagger. \quad (3.16)$$

Mit Gleichung (3.9a), (3.14) und (3.11) folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{\hbar} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \left\{ \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} f_k^*(\mathbf{r}, t) f_{k'}(\mathbf{r}, t) - \hat{a}_k^\dagger \hat{c}_k^\dagger f_k^*(\mathbf{r}, t) f_{k'}^*(\mathbf{r}, t) f_k^*(\mathbf{r}, t) \right. \\ &\quad \left. - \hat{c}_k \hat{a}_k f_k(\mathbf{r}, t) f_{k'}(\mathbf{r}, t) + \hat{c}_k \hat{c}_k^\dagger f_k(\mathbf{r}, t) f_{k'}^*(\mathbf{r}, t) \right\} E(\mathbf{k}) E(\mathbf{k}') \\ &\quad + \hbar c^2 \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \left\{ \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger f_k(\mathbf{r}, t) f_{k'}^*(\mathbf{r}, t) f_k^*(\mathbf{r}, t) + \hat{a}_k \hat{c}_k f_k(\mathbf{r}, t) f_{k'}(\mathbf{r}, t) \right. \\ &\quad \left. + \hat{c}_k^\dagger \hat{a}_k^\dagger f_k^*(\mathbf{r}, t) f_{k'}^*(\mathbf{r}, t) + \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k f_k^*(\mathbf{r}, t) f_{k'}(\mathbf{r}, t) \right\} \\ &\quad + \frac{mc^2}{\hbar} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \left\{ \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger f_k(\mathbf{r}, t) f_{k'}^*(\mathbf{r}, t) + \hat{a}_k \hat{c}_k f_k(\mathbf{r}, t) f_{k'}(\mathbf{r}, t) \right. \\ &\quad \left. + \hat{c}_k^\dagger \hat{a}_k^\dagger f_k^*(\mathbf{r}, t) f_{k'}^*(\mathbf{r}, t) + \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k f_k^*(\mathbf{r}, t) f_{k'}(\mathbf{r}, t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Mit

$$\int d^3\mathbf{r} f_k^*(\mathbf{r}, t) f_{k'}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2E(\mathbf{k})} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.18a)$$

$$\int d^3\mathbf{r} f_k(\mathbf{r}, t) f_{k'}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2E(\mathbf{k})} e^{-2iE(\mathbf{k})t/\hbar} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (3.18b)$$

$$\int d^3\mathbf{r} f_k^*(\mathbf{r}, t) f_{k'}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2E(\mathbf{k})} e^{2iE(\mathbf{k})t/\hbar} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (3.18c)$$

ergibt sich für den Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{r} \mathcal{H} \stackrel{(3.17)}{\stackrel{(3.18)}}{=} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} E(\mathbf{k}) \left\{ \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger \hat{c}_k^\dagger e^{2iE(\mathbf{k})t/\hbar} - \hat{c}_k \hat{a}_k e^{2iE(\mathbf{k})t/\hbar} + \hat{c}_k \hat{c}_k^\dagger \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} \underbrace{(c^2 \hbar^2 k^2 + m^2 c^4)}_{=E(\mathbf{k})} \frac{1}{E(\mathbf{k})} \left\{ \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_{-\mathbf{k}} \hat{c}_k e^{-2iE(\mathbf{k})t/\hbar} + \hat{c}_k^\dagger \hat{a}_k e^{2iE(\mathbf{k})t/\hbar} + \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \right\}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} E(\mathbf{k}) \left\{ \hat{a}_k^\dagger \hat{c}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k + \hat{c}_k \hat{c}_k^\dagger \right\} \quad (3.19)$$

$$\stackrel{(3.19a)}{\stackrel{(3.19b)}}{=} \int d^3\mathbf{k} \left\{ \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k + \delta(0) \right\} E(\mathbf{k})$$

oder

$$H = \int d^3\mathbf{k} E(\mathbf{k}) \{ \hat{n}_{a,\mathbf{k}} + \hat{n}_{c,\mathbf{k}} + 1 \} \quad (3.20)$$

mit den Anzahloperator der a -, bzw. c -Zustände

$$\hat{n}_{a,\mathbf{k}} = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \quad (3.21a)$$

$$\hat{n}_{c,\mathbf{k}} = \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k. \quad (3.21b)$$

b) Eigenzustände: Eigenzustände sind nun Fockraumzustände der Form

$$|n_{a,k}n_{c,k}\rangle,$$

wobei

$$\hat{n}_{a,k} |n_{a,k}n_{c,k}\rangle = n_{a,k} |n_{a,k}n_{c,k}\rangle, \quad (3.22a)$$

$$\hat{n}_{c,k} |n_{a,k}n_{c,k}\rangle = n_{c,k} |n_{a,k}n_{c,k}\rangle, \quad (3.22b)$$

die die Besetzung der a - und c -Zustände angeben.

c) Vakuumzustand und Normalordnung: Der Vakuumzustand hat die Energie

$$H|00\rangle = \int d^3\mathbf{k} E(\mathbf{k}) \rightarrow \infty. \quad (3.23)$$

Der Anteil $\int d^3\mathbf{k} (\dots + E(\mathbf{k}))$ im Hamiltonoperator hat sich aufgrund der Reihenfolge

$$\hat{\pi}\hat{\pi}^\dagger, (\nabla\hat{\phi})(\nabla\hat{\phi}^\dagger), \hat{\phi}\hat{\phi}^\dagger$$

in Gleichung (3.17) ergeben. Diese ist jedoch willkürlich! Auch möglich wäre

$$\phi\phi^* = \phi^*\phi \rightarrow \hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}, \quad (3.24)$$

dies hätte die Vakuumenergie 0 zur Folge. Messbar sind nur die Energiedifferenzen, daher hat jede Reihenfolge ihre Berechtigung. Ein übliches Vorgehen besteht darin, die *Normalordnung* einzuführen, die so gewählt ist, dass die Vakuumenergie verschwindet.

$$:\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k + \hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger: = 2\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k \quad (3.25a)$$

$$:H: = \int d^3\mathbf{k} E(\mathbf{k}) \{\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k + \hat{c}_k^\dagger\hat{c}_k\} \quad (3.25b)$$

Die ist unser neuer Hamiltonoperator. In der Schreibweise wird $:\dots:$ oft unterschlagen.

d) Mesonen: Um zu erkennen, welche Teilchen durch die gefundenen Lösungen beschrieben werden, helfen Symmetrien der Wirkung mit der Lagrangedichte (3.4a).

Die Lagrangedichte ist invariant unter der $U(1)$ Phasentransformation

$$\phi \rightarrow e^{-i\theta}\phi \quad (3.26)$$

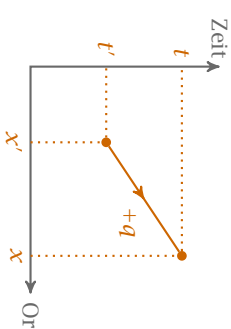
und damit auch die Wirkung. Es folgt mit der infinitesimalen Transformation

$$d\phi = \phi - \phi \stackrel{(3.26)}{=} (e^{-i\theta} - 1)\phi \approx -i d\theta\phi \quad (3.27)$$

aus den Gleichungen (2.45) bis (2.47) die Erhaltungsgröße

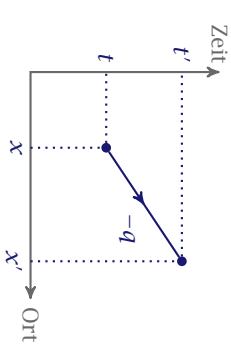
$$\partial_\mu \left[-i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \phi + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu^*} \phi^* \right] = 0 \quad (3.28)$$

Transport eines Teilchens von x' nach x



► 7 Links: $t > t'$: $\langle 0 | \phi(x)\phi^\dagger(x') | 0 \rangle$, Rechts: $t < t'$: $\langle 0 | \phi^\dagger(x')\phi(x) | 0 \rangle$.

Transport eines Antiteilchens von x nach x'



4.3.1 Feynman-Propagator für das Klein-Gordon-Feld

Wir rufen uns die Feldoperatoren des Klein-Gordon-Feldes in Erinnerung,

$$\phi(\mathbf{r}, t) \stackrel{(3.19a)}{=} \frac{2mc^2}{\hbar} \int d^3\mathbf{k} a_k f_k(\mathbf{r}, t) + c_k^\dagger t_k^*(\mathbf{r}, t)$$

und berechnen damit den Feynman-Propagator

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-x') &\stackrel{(4.43b)}{=} -i \langle 0 | T(\phi(x)\phi^\dagger(x')) | 0 \rangle \\ &= -i \frac{2mc^2}{\hbar} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \left\{ f_k(\mathbf{r}, t) f_{k'}^*(\mathbf{r}', t') \underbrace{\langle 0 | a_k a_{k'}^\dagger | 0 \rangle}_{=\delta(k-k')} \right. \\ &\quad \left. + f_k(\mathbf{r}, t) f_{k'}(\mathbf{r}', t') \underbrace{\langle 0 | a_k c_{k'} | 0 \rangle}_{=0} + f_k^*(\mathbf{r}, t) f_{k'}^*(\mathbf{r}', t') \underbrace{\langle 0 | c_k^\dagger a_{k'}^\dagger | 0 \rangle}_{=0} \right. \\ &\quad \left. + f_k^*(\mathbf{r}, t) f_{k'}(\mathbf{r}', t') \underbrace{\langle 0 | c_k^\dagger c_{k'} | 0 \rangle}_{=0} \right\} \Theta(t-t') \end{aligned}$$

Oder anders geschrieben,

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-x') &\stackrel{(3.9b)}{=} -i mc^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{E(\mathbf{k})} \left\{ e^{-ik_\mu(x^\mu-x'^\mu)} \Theta(t-t') + e^{ik_\mu(x^\mu-x'^\mu)} \Theta(t'-t) \right\} \\ &\quad -i \frac{2mc^2}{\hbar} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' f_k(\mathbf{r}, t) f_{k'}^*(\mathbf{r}', t') f_k^*(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \Theta(t'-t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Die beiden Summanden lassen sich auch einheitlich schreiben. Dazu machen wir einen kleinen Ausflug in die Funktionalanalysis und betrachten das Integral

$$\int_{c_1} \frac{e^{-ik_0(x^0-x'^0)} e^{-ik_\mu(x^\mu-x'^\mu)}}{k_\mu k^\mu - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2} dk_0$$

Die Kommutatoren/Antikommutatoren der Feldoperatoren sind nach den Quantisierungsregeln *aller* behandelten Felder *keine* Operatoren sondern komplexe Zahlen, welche gegebenenfalls noch mit Einheiten multipliziert sind, also

$$\langle 0 | \underline{AB} | 0 \rangle = \underline{AB}, \quad (4.36)$$

weiterhin gilt

$$\langle 0 | :AB: | 0 \rangle = 0 \quad (4.37)$$

und damit

$$\langle 0 | T(AB) | 0 \rangle \stackrel{(4.33)}{=} \underline{AB} \stackrel{(4.37)}{=} \underline{AB}. \quad (4.38)$$

Für ein zeitgeordnetes Produkt erhält man damit

$$T(AB) \stackrel{(4.33)}{=} :AB: + \underline{AB} \stackrel{(4.38)}{=} :AB: + \langle 0 | T(AB) | 0 \rangle, \quad (4.39)$$

also das normalgeordnete Produkt addiert mit einer komplexen Zahl, nämlich nach (4.38) den Vakuumerwartungswert von $T(AB)$. Die Verallgemeinerung lautet (ohne Beweis)

$$\begin{aligned} T(A_1 A_2 \dots A_n) &= :A_1 A_2 \dots A_n: \\ &+ \underline{A_1 A_2 \dots A_n} + :A_1 A_2 A_3 \dots A_n: + \dots \\ &+ :A_1 A_2 A_3 A_4 \dots A_n: + \underline{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \dots A_n} + \dots \\ &+ :A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \dots A_n: + \underline{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 \dots A_n} + \dots, \end{aligned} \quad (4.40)$$

wobei in der zweiten Zeile in (4.41) jeweils alle Möglichkeiten einer Kontraktion in der Normalordnung auftreten, in der zweiten Zeile alle Möglichkeiten zweier Kontraktionen, in der dritten Zeile alle Möglichkeiten dreier Kontraktionen usw. Dies ist das *Wicksche Theorem*. Treten bereits normalgeordnete Terme in (4.40) auf, zum Beispiel $T(AB:CD:EF)$, so entfallen in (4.40) die Kontraktionen, welche zwei Operatoren aus demselben normalgeordneten Produkt enthalten würden.

4.3 Propagatoren

Propagatoren stellen die trivialste (nämlich keine) Wechselwirkung dar. Als Beispiel betrachten wir ein Teilchen, das sich zum Zeitpunkt t_1 am Ort \mathbf{r}_1 befinden soll. Es wird dabei durch den Zustand

$$|\psi(\mathbf{r}_1, t_1)\rangle = \phi^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) |0\rangle \quad (4.41)$$

beschreiben. Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit wissen, mit der das Teilchen zum Zeitpunkt t_2 am Ort \mathbf{r}_2 ist. Dazu benötigt man

$$\langle \psi(\mathbf{r}_2, t_2) | \psi(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \stackrel{(4.41)}{=} \langle 0 | \phi(\mathbf{r}_2, t_2) \phi^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) | 0 \rangle. \quad (4.42)$$

Der Feynman-Propagator

$$\Delta_F(x - x') = -i \langle 0 | T(\phi(x) \phi^\dagger(x')) | 0 \rangle \stackrel{(4.38)}{=} -i \underline{\phi(x) \phi^\dagger(x')} \quad (4.43)$$

tritt typischerweise in Zeitentwicklungen auf. Seine Bedeutung wird klar, wenn wir die beiden Fälle $t > t'$ und $t < t'$ und die dazugehörigen Orts-Zeit-Diagramme in Abbildung 7 betrachten.

Daraus lässt sich die folgende integrale Erhaltungsgröße gewinnen

$$Q = \frac{i}{\hbar} \int d^3\mathbf{r} (\phi^* \pi^* - \phi \pi), \quad (3.29)$$

die Ladung heißt. Tatsächlich, wenn man Gleichung (3.28) explizit mit Gleichung (3.4a) ausrechnet, findet man

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (3.30a)$$

mit

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (3.30b)$$

die nicht positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte j^0 und Stromdichte \mathbf{j} des Klein-Gordon-Feldes. Diese hat bereits bei der Diskussion der Klein-Gordon-Gleichung Probleme in der Interpretation bereitet. Für die elektrische Ladung lässt sich diese Erhaltungsgröße aber sehr gut verstehen (Ladung q des Teilchens),

$$Q_q = \frac{iq}{\hbar} \int d^3\mathbf{r} (\phi^* \pi^* - \phi \pi). \quad (3.31a)$$

Die dazugehörigen Operatoren lauten

$$\hat{Q}_q = \frac{iq}{\hbar} \int d^3\mathbf{r} (\hat{\phi}^\dagger \hat{\pi}^\dagger - \hat{\phi} \hat{\pi}) \quad (3.31b)$$

$$:\hat{Q}_q: = q \int d^3\mathbf{k} (\hat{n}_{a,\mathbf{k}} - \hat{n}_{c,\mathbf{k}}) \quad (3.31c)$$

Daraus lesen wir ab:

- ▶ Die a -Teilchen haben die Ladung q
- ▶ Die c -Teilchen beschreiben die zugehörigen Antiteilchen mit Ladung $-q$ (sonst identisch, positive Energien)
- ▶ Ist das Feld reell, kann es nach (3.31a) nur Teilchen der Ladung Null beschreiben, d.h. Teilchen sind gleich ihre Antiteilchen (*Majorana-Teilchen*).
- ▶ Komplexe Felder sind in der Lage, die geladenen π^+ und π^- -Mesonen zu beschreiben.
- ▶ Aber auch K^0 und \bar{K}^0 , die nicht elektrisch geladen sind, werden durch komplexe Felder beschrieben. Sie unterscheiden sich in der Hyperladung Q nach Gleichung (3.31a). Sie sind also keine Majorana-Teilchen.

e) Impuls: Eine weitere Erhaltung folgt aus der Translationsinvarianz aus (3.4a).

$$d\phi = 0, \quad dx^\ell = \epsilon^\ell \quad (3.32)$$

Daraus

$$\mathbf{p} = - \int d^3\mathbf{r} (\pi \nabla \phi + \pi^* \nabla \phi^*) \quad (3.33a)$$

bzw. die Operatoren dazu

$$\mathbf{p} = - \int d^3\mathbf{r} (\pi \nabla \phi + \pi^\dagger \nabla \phi^\dagger). \quad (3.33b)$$

Dies können wir als Impuls verstehen, denn tatsächlich folgt für das Klein-Gordon-Feld

$$:\hat{p}_i: = \int d^3\mathbf{k} \hbar \mathbf{k} (\hat{n}_{a,\mathbf{k}} + \hat{n}_{c,\mathbf{k}}). \quad (3.33c)$$

3.2 Das Dirac-Feld

3.2.1 Kanonische Variablen

Wir versuchen es mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi \quad (3.34)$$

Die Ableitungen liefern

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = -mc^2 \bar{\psi} \quad (3.35a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \quad (3.35b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \quad (3.35c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}, \mu} = 0 \quad (3.35d)$$

Daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}, \mu} &= -i\hbar c \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - mc^2 \bar{\psi} \\ &= -i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2 \bar{\psi} = 0 \end{aligned}$$

mit

$$a \tilde{a}_\mu b = (\partial_\mu a) b.$$

Damit ist jeweils nur eine Vertauschung

$$\begin{aligned} a_{k_a} a_{k_a}^\dagger &= \pm a_{k_a}^\dagger a_{k_a} + x \\ a_{k_b} a_{k_b}^\dagger &= \pm a_{k_b}^\dagger a_{k_b} + y \end{aligned}$$

nötig, um die nichtverschwindenden Terme x und y zu erhalten, alle anderen führen zur Anwendung von Vernichtern auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ und damit verschwinden diese. Das Vorzeichen ist hierbei $+$ für Bosonen und $-$ für Fermionen (Kommutator/Antkommutator). Der Term in (4.32) ist gerade normalgeordnet. Eine Verallgemeinerung überlegt man sich leicht für höhere Potenzen der Operatoren. Unter einer Normalordnung höherer Potenzen versteht man die Form,

$$a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger \dots a_{k_2} a_{k_1},$$

in der alle Erzeuger links und alle Vernichter rechts stehen. Die Reihenfolge der Indizes $1, 2, \dots$ ist nur für Fermionen relevant, bei bosonischen Operatoren kommutieren die einzelnen a_{k_i} respektive $a_{k_i}^\dagger$ untereinander.

4.2.4 Wick'sches Theorem

Wir führen die *Kontraktion* zweier Operatoren ein.

$$\overline{AB} = T(AB) - :AB: \quad (4.33)$$

Von der Zeitordnung wissen wir, dass

$$T(AB) = AB \quad (4.34a)$$

gilt, falls die Operatoren bereits zeitgeordnet sind, ansonsten gilt:

$$T(AB) = \begin{cases} BA = AB + BA - AB = AB + [B, A] & \text{Bosonen} \\ -BA = AB - BA - AB = AB - [B, A] & \text{Fermionen} \end{cases} \quad (4.34b)$$

Analog gilt für die Normalordnung, sofern AB bereits normalgeordnet ist

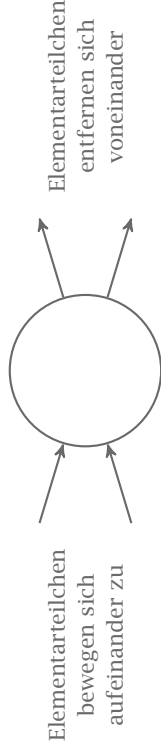
$$:AB: = AB.$$

Ist jedoch B ein Erzeuger und A ein Vernichter, so gilt:

$$:AB: = \begin{cases} AB + [B, A] & \text{Bosonen} \\ AB - [B, A] & \text{Fermionen} \end{cases} \quad (4.35)$$

Für die Kontraktion verbleibt:

$$\overline{AB} = \begin{cases} a[B, A] & \text{Bosonen} \\ -a\{B, A\} & \text{Fermionen} \end{cases} \quad a \in \{1, 0, -1\}$$



Wechselwirkungsbereich

► 6 Einfallende Teilchen verhalten sich für Zeiten $t \rightarrow -\infty$ wie freie Teilchen. Nachdem sie den Wechselwirkungsbereich durchlaufen haben, sind sie für Zeiten $t \rightarrow \infty$ wieder als freie Teilchen zu interpretieren.

Es folgt für die Wahrscheinlichkeit, dass der Übergang $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ stattfindet

$$\langle \psi_f(t) | \psi_i(t) \rangle = \langle f | U(\infty, -\infty) | i \rangle \equiv S_{fi}, \tag{4.30}$$

mit dem Element S_{fi} der **Streumatrix** S . Daraus folgern wir

$$S = U(\infty, -\infty) \stackrel{(4.24)}{=} T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I(t')}. \tag{4.31}$$

Vorgehen: Um die Streumatrix S bestimmen zu können, entwickeln wir S in eine Störungsreihe. Dies ist jedoch schwer auszuwerten, da wir gesehen haben, dass normalgeordnete Produkte relevant sind, der Zeitordnungsoperator T stört jedoch diese Normalordnung. Ein zeitgeordnetes Produkt lässt sich jedoch in ein normalgeordnetes umschreiben.

Als Beispiel betrachten wir einen Wechselwirkungsterm der einen Feldoperator eines reellen Feldes ϕ enthalten soll,

$$\phi = \int d^3\mathbf{k} a_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(x) + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} f_{\mathbf{k}}^*(x).$$

In zweiter Ordnung Störungstheorie erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T(\phi(t_1)\phi(t_2)).$$

Durch die Zeitordnung treten darin Terme der Form

$$a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}, \quad a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_1}, \quad a_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_2}, \quad \dots$$

auf. Insbesondere kommt dadurch jede erdenkliche Kombination der einzelnen Erzeuger und Vernichter vor. Betrachten wir nun ein Matrixelement der Streumatrix

$$\langle \mathbf{k}_a | S | \mathbf{k}_b \rangle, \tag{4.32}$$

$$S_{ab} = \langle \mathbf{k}_a | a_{\mathbf{k}_a}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_b} | \mathbf{k}_b \rangle$$

so ist hierfür die Darstellung

$$S_{ab} = \langle 0 | a_{\mathbf{k}_a} a_{\mathbf{k}_a}^{\dagger} a_{\mathbf{k}_b} a_{\mathbf{k}_b}^{\dagger} | 0 \rangle.$$

besonders einfach, denn

Man erhält also

$$i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\bar{\partial}_{\mu} + \frac{mc}{\hbar}\bar{\psi} = 0 \tag{3.36a}$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{,\mu}} = i\hbar c \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \underline{\psi} - mc^2 \underline{\psi} = 0, \tag{3.36b}$$

also die **Dirac-Gleichung** und ihre adjungierte. Die Impulsdichten sind mit

$$\mathcal{L} \stackrel{(3.27)}{=} i\hbar \bar{\psi} \gamma^0 \dot{\underline{\psi}} + i\hbar c \bar{\psi} \gamma^l \partial_l \underline{\psi} - mc^2 \bar{\psi} \underline{\psi} \tag{3.37}$$

$$\underline{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{\psi}}} \stackrel{(3.37)}{=} i\hbar \bar{\psi} \gamma^0 = i\hbar \underline{\psi}^{\dagger}, \tag{3.38a}$$

$$\bar{\underline{\pi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0, \tag{3.38b}$$

gegeben.

Damit lautet die Hamiltondichte

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \underline{\pi} \dot{\underline{\psi}} + \bar{\underline{\pi}} \dot{\bar{\psi}} - \mathcal{L} \\ &\stackrel{(3.34)}{=} (\underline{\pi} - i\hbar \bar{\psi} \gamma^0) \dot{\underline{\psi}} - i\hbar c \bar{\psi} \gamma^l \partial_l \underline{\psi} + mc^2 \bar{\psi} \underline{\psi} \\ &= (\underline{\pi} - \underline{\pi}) \dot{\underline{\psi}} - i\hbar c \bar{\psi} \gamma^l \partial_l \underline{\psi} + mc^2 \bar{\psi} \underline{\psi} \\ &= -i\hbar c \bar{\psi} \gamma^l \partial_l \underline{\psi} + mc^2 \bar{\psi} \underline{\psi}. \end{aligned}$$

Auf den ersten Blick hängt die Hamiltondichte nicht von der Impulsdichte ab. Dies stimmt jedoch nicht ganz, denn wir dürfen nicht vergessen, dass

$$\bar{\psi} \stackrel{(3.38a)}{=} \frac{1}{i\hbar} \underline{\pi} \gamma^0 \tag{3.39}$$

gilt. Somit lautet die Hamiltondichte

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -c \underline{\pi} \gamma^0 \gamma^l \partial_l \underline{\psi} + \frac{mc^2}{i\hbar} \underline{\pi} \gamma^0 \underline{\psi} \\ &= -c \underline{\pi} \alpha^l \partial_l \underline{\psi} + \frac{mc^2}{i\hbar} \underline{\pi} \gamma^0 \underline{\psi} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \underline{\pi} \gamma^0 \underbrace{(-i\hbar c \gamma^l \partial_l + mc^2)}_{\equiv H_D} \underline{\psi}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

in der wir den Dirac'schen Hamiltonoperator H_D wiedererkennen.

3.2.2 Quantisierung

a) Hamiltonoperator Für die Quantisierung bietet sich der Weg aus Abschnitt 3.1.3 an. Der erste Schritt besteht dann darin, die Lösungen der Dirac-Gleichung zu bestimmen. Diese lauten

$$\begin{aligned} \underline{\psi} &= \underline{\psi}^{(+)} + \underline{\psi}^{(-)} \\ &= \sum_{s=1,1'} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E_{\mathbf{k}}}} \left(b(\mathbf{k}, s) \underline{u}(\mathbf{k}, s) e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} + d^*(\mathbf{k}, s) \underline{v}(\mathbf{k}, s) e^{ik_{\mu}x^{\mu}} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

mit den Spinoren

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \sqrt{\frac{E_{\mathbf{k}} + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{c\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{k}} + mc^2} \chi_s \end{pmatrix} \\ \underline{v} &= \sqrt{\frac{E_{\mathbf{k}} + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{c\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{k}} + mc^2} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.42)$$

mit der Energie-Impuls-Beziehung

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\hbar^2 c^2 \mathbf{k}^2 + m^2 c^4}$$

und den Relationen

$$\begin{aligned} \overline{u}_s \underline{u}_{s'} &= u_s \overline{v}_{s'} = \delta_{ss'}, \\ \overline{v}_s \underline{u}_{s'} &= \overline{u}_s \underline{v}_{s'} = 0, \\ \underline{u}_s^\dagger \underline{u}_{s'} &= \overline{v}_s^\dagger \underline{v}_{s'} = \frac{E_{\mathbf{k},s}}{mc^2} \delta_{ss'}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Der nächste Schritt, den wir bestreiten wollen, ist der Übergang zu Operatoren.

$$\hat{\underline{\psi}} \stackrel{(3.41)}{=} \sum_{s=1,1'} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{b}(\mathbf{k}, s) \underline{u}(\mathbf{k}, s) e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} + \hat{d}^\dagger(\mathbf{k}, s) \underline{v}(\mathbf{k}, s) e^{ik_{\mu}x^{\mu}} \right) \quad (3.46)$$

$$\hat{\underline{\pi}} \stackrel{(3.46)}{=} i\hbar \hat{\underline{\psi}} \dot{y}^0 \stackrel{(3.46)}{=} \sum_{s=1,1'} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, s) \overline{u}(\mathbf{k}, s) \dot{y}^0 e^{ik_{\mu}x^{\mu}} + \hat{d}(\mathbf{k}, s) \overline{v}(\mathbf{k}, s) \dot{y}^0 e^{-ik_{\mu}x^{\mu}} \right) \quad (3.47)$$

Durch Rechnung folgt der Hamiltonoperator

$$H = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{H} = \int d^3\mathbf{k} \sum_{s=1,1'} E_{\mathbf{k}} \left(\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, s) \hat{b}(\mathbf{k}, s) - \hat{d}(\mathbf{k}, s) \hat{d}^\dagger(\mathbf{k}, s) \right) \quad (3.48)$$

Für Bosonen wird das positive Vorzeichen benötigt, für Fermionen das negative. Dabei steht p für die Anzahl der Permutationen, die benötigt werden, um ein zeitgeordnetes Produkt zu erzeugen, also

$$t_{\alpha_1} < t_{\alpha_2} < t_{\alpha_3} \dots \quad (4.22b)$$

Für einen Term n -ter Ordnung in (4.21) lässt sich dann schreiben

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\hbar^n} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) \\ &\stackrel{(4.22a)}{=} \frac{1}{n! \hbar^n} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)) \end{aligned} \quad (4.23)$$

oder schließlich

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &\stackrel{(4.21)}{=} \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) \\ &= T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_I(t')}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

In einer Störungsrechnung bestimmt man nicht die volle Reihe in (4.24), sondern die niedrigsten Ordnungen, also zum Beispiel

$$U_1(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_I(t') dt' \quad (4.25)$$

für die erste Ordnung, was dann auf einen genäherten Zeitentwicklungsoperator der Form

$$U(t, t_0) \approx \mathbb{1} + U_1(t, t_0) \quad (4.26)$$

führt.

4.2.3 Die Streumatrix

Wir wollen im Folgenden Vorgänge betrachten, die wie folgt ablaufen. Am Anfang ($t \rightarrow -\infty$) liegt die Situation vor, dass sich ein freies Teilchen dem Streuzentrum nähert, gestreut wird und zu einem Zeitpunkt $t \rightarrow \infty$ wieder als freies Teilchen behandelt werden kann (siehe auch Bild 6). Für zwei Teilchen haben wir anfänglich den Zustand

$$|i\rangle = |\mathbf{k}_1, S_1\rangle |\mathbf{k}_2, S_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger(\mathbf{k}_1, S_1) a^\dagger(\mathbf{k}_2, S_2) |0\rangle, \quad (4.27)$$

wobei der Zustand $|0\rangle$ den Vakuumzustand beschreibt. Unter der Annahme, dass der freie Zustand $|i\rangle$ zur Zeit $t \rightarrow -\infty$ vorliegt, erhalten wir für die Zeitentwicklung

$$|\psi_i(t)\rangle = U(t, -\infty) |i\rangle. \quad (4.28)$$

Zur Zeit $t \rightarrow \infty$ liegt der Endzustand $|f\rangle$ vor, der sich erneut durch freie Teilchenzustände beschreiben lässt,

$$\begin{aligned} |f\rangle &= U(\infty, t) |\psi_i(t)\rangle, \\ |\psi_f(t)\rangle &= U(t, \infty) |f\rangle. \end{aligned} \quad (4.29a) \quad (4.29b)$$

Diese besitzen keine explizite Zeitabhängigkeit im Schrödingerbild. Nach (4.12) und (4.11) entspricht die Wechselwirkungsdarstellung dem Heisenbergbild der freien Felder, also

$$\phi_I(\mathbf{r}, t) = \phi_{H_I, \text{freie Felder}}. \quad (4.15)$$

Für den Wechselwirkungsterm gilt dann

$$H_{II} = e^{iH_0 t/\hbar} H_I(\Phi(\mathbf{r}, t), \dots) e^{-iH_0 t/\hbar} = H_I(\Phi_I(\mathbf{r}, t), \dots). \quad (4.16)$$

Verwendet man die Heisenbergdarstellung der Feldoperatoren, also zum Beispiel (3.11a) und (3.11b) für das Klein-Gordon-Feld, erhält man automatisch die Wechselwirkungsdarstellung H_{II} des Wechselwirkungsterms H_I . Damit ist H_{II} explizit zeitabhängig.

Die Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild lautet für einen Zustand

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t/\hbar} |\psi_S(t)\rangle, \quad (4.17a)$$

$$i\hbar \partial_t |\psi_I(t)\rangle = H_{II}(t) |\psi_I(t)\rangle. \quad (4.17b)$$

Wie wir sehen, wird die Zeitentwicklung nur durch H_{II} (im Folgenden nur noch H_I genannt) bestimmt. Der Zeitentwicklungsoperator ergibt sich dann zu

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle, \quad (4.17c)$$

$$U_I(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar}. \quad (4.17d)$$

Dabei gilt stets

$$i\hbar \partial_t U_I(t, t_0) = H_I U_I(t, t_0). \quad (4.18)$$

4.2.2 Störungsrechnung

Die formale Lösung von (4.18) ist gegeben durch

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') U(t', t_0). \quad (4.19)$$

Dabei ist der erste Term in (4.19) so gewählt, dass die Unitarität von $U(t, t_0)$ gewährleistet ist. Im Rahmen der Störungstheorie benutzen wir einen Iterationsansatz der Form

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t, t_0). \quad (4.20a)$$

Einsetzen von (4.20a) in (4.19) führt auf die Rekursionsbeziehung

$$U_n(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_I(t') U_{n-1}(t', t_0). \quad (4.20b)$$

Damit ergibt sich schließlich

$$U_n(t, t_0) \stackrel{(4.20a)}{=} -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_I(t') - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t'') H_I(t') + \dots \quad (4.21)$$

Mit dem *Zeitordnungsoperator* T kann dieser Term vereinfacht werden. Seine Wirkung ist

$$T(A(t_1)A(t_2)A(t_3)A(t_4)) = (\pm 1)^p A(t_{\alpha_1})A(t_{\alpha_2}) \dots \quad (4.22a)$$

b) Ladung Analog zu (3.31c) beim Klein-Gordon-Feld gewinnt man aus der Invarianz der Wirkung unter einer globalen Eichtransformation die Ladungserhaltung,

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{mit} \quad j^\mu = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \psi = c \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3.49a)$$

Daraus erfolgt die Erhaltung von

$$Qq = q \int d^3\mathbf{r} \frac{j^0}{c} = q \int d^3\mathbf{r} \bar{\psi} \gamma^0 \psi, \quad (3.49b)$$

$$\hat{Q}q = \frac{q}{i\hbar} \int d^3\mathbf{r} \hat{\pi} \hat{\psi} \quad (3.49c)$$

$$= q \int d^3\mathbf{k} \sum_{s=1,4} [\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, s) \hat{b}(\mathbf{k}, s) + \hat{d}(\mathbf{k}, s) \hat{d}^\dagger(\mathbf{k}, s)]. \quad (3.49d)$$

c) Quantisierungsregeln Aus dem Vergleich der Klein-Gordon-Theorie und den experimentellen Tatsachen wollen wir erreichen, dass \hat{b} und \hat{b}^\dagger Erzeuger und Vernichter von Teilchen der Ladung q sind. Außerdem sollen \hat{d} und \hat{d}^\dagger Erzeuger bzw. Vernichter der zugehörigen Antiteilchen sein. Ein weiteres Problem was uns an der bisherigen Dirac-Theorie stört, ist die nach unten unbeschränkte Energie. Eine rein positive Energie soll vorliegen. Alle diese Forderungen lassen sich erfüllen, wenn man fermionische Vertauschungsregeln für $\hat{\psi}$ und $\hat{\pi}$ postuliert. Dazu benutzen wir im Folgenden die Formulierung

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}.$$

$$\{\psi_\alpha, \psi_\beta\} = \{\hat{\pi}_\alpha, \hat{\pi}_\beta\} = 0 \quad (3.50a)$$

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}_\beta(\mathbf{r}', t)\} = i\hbar \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.50b)$$

$$\{\hat{b}(\mathbf{k}, s), \hat{b}(\mathbf{k}', s)\} = \{\hat{d}(\mathbf{k}, s), \hat{d}(\mathbf{k}', s')\} = 0 \quad (3.50c)$$

$$\{\hat{d}(\mathbf{k}, s), \hat{b}(\mathbf{k}', s')\} = \{\hat{b}(\mathbf{k}, s), \hat{d}^\dagger(\mathbf{k}', s')\} = 0 \quad (3.50d)$$

$$\{\hat{b}(\mathbf{k}, s), \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}', s')\} = \{\hat{d}(\mathbf{k}, s), \hat{d}^\dagger(\mathbf{k}', s')\} = \delta_{s,s'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (3.50e)$$

Mit diesen fermionischen Vertauschungsregeln ergibt sich die korrekte Beschreibung von Elektronen mit der Ladung $q = -e$,

$$:H: = \int d^3\mathbf{k} \sum_{s=1,4} E_k [\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, s) \hat{b}(\mathbf{k}, s) + \hat{d}^\dagger(\mathbf{k}, s) \hat{d}(\mathbf{k}, s)], \quad (3.51)$$

$$:\hat{Q}: = -e \int d^3\mathbf{k} \sum_{s=1,4} [\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, s) \hat{b}(\mathbf{k}, s) - \hat{d}^\dagger(\mathbf{k}, s) \hat{d}(\mathbf{k}, s)]. \quad (3.52)$$

d) Impuls Für den Impulsoperator findet man

$$:\mathbf{p}: = \int d^3\mathbf{k} \sum_{s=1,4} \hbar \mathbf{k} [\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, s) \hat{b}(\mathbf{k}, s) + \hat{d}^\dagger(\mathbf{k}, s) \hat{d}(\mathbf{k}, s)], \quad (3.53)$$

wobei sich die Komponenten des Impulses wie folgt ableiten lassen,

$$\hat{p}_i = -i\hbar \int \underline{\hat{\psi}}^\dagger \partial_i \underline{\hat{\psi}} d^3\mathbf{r}.$$

3.3 Maxwell-Feld

3.3.1 Maxwell-Gleichungen und Eichfreiheit

Wir definieren den Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

der sich aus den Potentialen

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

via

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (3.55)$$

gewonnen lässt. Damit lauten die Maxwellgleichungen

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma} \partial_\mu F_{\alpha\sigma} = 0, \quad (3.56a)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \quad (3.56b)$$

Für freie Felder wird $j^\mu = 0$ und wir erhalten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.56c)$$

Wie aus der Elektrodynamik bekannt ist, sind die Maxwell-Gleichungen invariant unter einer Eichtransformation

$$A^\mu \rightsquigarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda. \quad (3.57)$$

Für uns wäre es scheinbar sinnvoll, die Lorentz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (3.58)$$

zu verwenden. Damit ist A'^μ jedoch immer noch nicht eindeutig bestimmt, denn es gilt

$$0 = \partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \square \Lambda, \quad (3.59)$$

was für jedes $\Lambda' = \Lambda + \Lambda_1$ mit $\square \Lambda_1 = 0$ erfüllt ist. Oft wählt man Λ zusätzlich so, dass

$$cA^0 = \phi = 0 \quad (3.60)$$

erfüllt ist, was uns auf die Coulomb-Eichung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (3.61)$$

führt. Gleichung (3.60) und (3.61) bilden die sog. *Strahlungseichung*. Diese ist nicht kovariant, bietet aber eine einfache Formulierung für die Quantisierung und kann jederzeit in einem gegebenen Inertialsystem formuliert werden. In der Strahlungseichung erkennt man, dass das elektromagnetische Feld nur zwei Freiheitsgrade besitzt, denn A^μ hat vier Komponenten, jedoch erhalten wir aus Gleichung (3.60) und (3.61) zwei Bedingungen für A^μ . Es gibt in der Strahlungseichung daher nur die zwei Transversalkomponenten einer sich ausbreitenden Welle zu bestimmen.

4.2.1 Zeitentwicklung und Wechselwirkungsbild

Die Feldoperatoren der freien Felder folgen den Heisenberg-Bewegungsgleichungen

$$i\hbar \dot{\phi} = [\phi, :H:], \quad (4.8)$$

sind also im *Heisenbergbild* gegeben. Als Beispiel betrachten wir die Klein-Gordon-Gleichung und berechnen die Heisenberg-Bewegungsgleichung für den Feldoperator $\phi(\mathbf{r}, t)$

$$[\phi(\mathbf{r}, t), :H:] \stackrel{(3.21a)}{\stackrel{(3.25b)}}{=} \sqrt{\frac{2mc^2}{\hbar}} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' E(\mathbf{k}) \left\{ [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] a_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}, t) + c_{\mathbf{k}}^\dagger [c_{\mathbf{k}'}^\dagger, c_{\mathbf{k}'}] f_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}, t) \right\}.$$

Dabei ist $E(\mathbf{k}) = \hbar c k_0$ und $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ sowie $[c_{\mathbf{k}}^\dagger, c_{\mathbf{k}'}] = -\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ und somit

$$[\phi(\mathbf{r}, t), :H:] = \sqrt{\frac{2mc^2}{\hbar}} \hbar \left\{ \int d^3\mathbf{k} a_{\mathbf{k}} c k_0 f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) + c_{\mathbf{k}}^\dagger (-c k_0 f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}, t)) \right\}.$$

Da die Funktion $f_{\mathbf{k}} \propto e^{-ik_\mu x^\mu}$ ist, können wir den Term $c k_0 f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ als Ableitung nach der Zeit interpretieren

$$c k_0 f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = i c \partial_{ct} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t).$$

Damit erhalten wir schließlich

$$[\phi(\mathbf{r}, t), :H:] = i\hbar \partial_t \phi(\mathbf{r}, t). \quad (4.9)$$

Eine formale Lösung für den Feldoperator ist

$$\phi_H(\mathbf{r}, t) = e^{iHt/\hbar} \phi_S(\mathbf{r}) e^{-iHt/\hbar}. \quad (4.10)$$

Dabei symbolisiert der Index H , dass es sich um einen Operator im Heisenbergbild handelt und entsprechend kennzeichnet S einen Operator im Schrödingerbild $\phi_S(\mathbf{r}) = \phi_H(\mathbf{r}, 0)$.

Im Folgenden werden wir eine typische Aufteilung des Hamiltonoperators

$$H = H_0 + H_1 \quad (4.11)$$

verwenden. Dabei ist H_0 der Hamiltonoperator des freien Feldes und H_1 beschreibt die Wechselwirkung, welche wir als kleine Störung behandeln wollen. Dazu definieren wir zuerst das *Wechselwirkungsbild* eines Operators A im Schrödingerbild, der eine explizite Zeitabhängigkeit trägt

$$A_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} A_S(t) e^{-iH_0 t/\hbar}, \quad (4.12)$$

was zu einer Heisenberg-Bewegungsgleichung

$$i\hbar \dot{A}_I(t) = [A_I(t), H_0] + i\hbar \partial_t A_I(t) \quad (4.13a)$$

mit

$$\partial_t A_I = e^{iH_0 t/\hbar} \partial_t A_S e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (4.13b)$$

führt. Insbesondere gilt für Feldoperatoren

$$i\hbar \dot{\phi}_I(\mathbf{r}, t) = [\phi_I(\mathbf{r}, t), H_0]. \quad (4.14)$$

- ▶ der Lagrangedichte \mathcal{L}_M des Maxwellfeldes in Lorentzzeichnung,
- ▶ dem Wechselwirkungsterm \mathcal{L}_I .

Im Gegensatz zu den freien Feldern kommen die Felder in höheren Ordnungen als zwei vor. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen enthalten Terme, die nichtlinear in den Feldern sind.

Im Allgemeinen werden Wechselwirkungen durch nichtlineare Terme beschrieben. Das einfachste vorstellbare Beispiel ist ein Teilchen, welches mit sich selbst wechselwirkt.

4.1.3 Modellpotential

Ein mit sich selbst wechselwirkendes ungeladenes skalares Teilchen könnte beschrieben werden durch

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (4.5a)$$

wobei

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (4.5b)$$

$$\mathcal{L}_I = -\frac{g}{3}\phi^3. \quad (4.5c)$$

Dieses Modell hat jedoch keinen stabilen Grundzustand. Daher wählen wir den nächst einfacheren Term

$$\mathcal{L}_I = -\frac{g}{4}\phi^4, \quad g > 0. \quad (4.5d)$$

Dieses Potential hat die Form eines Mexican-Hat. Die daraus resultierenden Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \stackrel{(4.5b)}{=} \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi + g \phi^3. \quad (4.6)$$

Damit erhalten wir die Impulsdichte

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

und die Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2}(\partial_\ell \phi)(\partial^\ell \phi) + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{g}{4}\phi^4. \quad (4.7)$$

Das System besitzt für reelle Massen einen Grundzustand bei $\phi = 0$.

4.2 Formalismus zur Behandlung von Wechselwirkungen

Die nichtlinearen Terme lassen sich zumeist nicht explizit lösen, daher ist eine störungstheoretische Behandlung notwendig.

3.3.2 Kanonische Variablen

Wir versuchen es mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.62)$$

für freie Felder.

Die Lagrangedichte ausgedrückt durch A^μ lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\stackrel{(3.62)}{=} -\frac{1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}}^2 - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}} \nabla \phi - \frac{1}{c^2} (\nabla \phi)^2 - (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right) \\ &\stackrel{(3.60)}{=} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}}^2 - (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right) \\ &\stackrel{(3.55)}{=} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Da zum Schluss nur noch die Raumkomponenten \mathbf{A} in der Lagrangedichte vorhanden sind, sieht man leicht, dass diese die relevanten Felder sind. Aus der Lagrangedichte lassen sich die Impulsdichten bestimmen.

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} \stackrel{(3.63)}{=} \frac{1}{\mu_0 c^2} \dot{A}^i = -\frac{1}{\mu_0 c^2} \dot{A}^i = \varepsilon E^i. \quad (3.64)$$

Durch die bereits bekannte Legendretransformation erhalten wir ebenso die Hamiltondichte.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_i \pi^i \dot{A}^i - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu_0 c^2 \sum_i (\pi^i)^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\text{rot } \mathbf{A})^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}}^2 + (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right) = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

3.3.3 Quantisierung

Wir postulieren die (bosonischen) Vertauschungsrelationen:

$$[\hat{A}^i, \hat{A}^j] = [\hat{E}^i, \hat{E}^j] = 0 \quad (3.67a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 [\hat{E}^i(\mathbf{x}, t), \hat{A}^j(\mathbf{x}', t)] &\stackrel{(3.64)}{=} [\hat{\pi}^i(\mathbf{x}, t), \hat{A}^j(\mathbf{x}', t)] \\ &= -i\hbar \delta^{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (3.67b)$$

Dabei muss jedoch die Eichung beachtet werden. Aus $\phi = 0$ folgt $\text{div } \mathbf{E} = \partial_j E^j = 0$. Aus $\text{div } \mathbf{A} = 0$ folgt $\partial_j A^j = 0$ und somit

$$\partial_i [\hat{E}^i, \hat{A}^j] = \partial_j [\hat{E}^i, \hat{A}^j] \stackrel{(3.67b)}{=} -i\hbar \partial_j' \delta^{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.68)$$

Dies wird erreicht mit

$$\delta^{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow \delta^{ij(w)}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \right) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}. \quad (3.69)$$

Damit erhält man die Modenentwicklung

$$\hat{A}^i(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\mu_0 c^2}{(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \varepsilon^i(\mathbf{k}, \lambda) \left\{ \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\mathbf{k}_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k}_\mu x^\mu} \right\}, \quad (3.70a)$$

wobei

$$c\omega = +|\mathbf{k}| = k^0, \quad (3.70b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (3.70c)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \lambda_1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \lambda_2) = \delta_{\lambda_1, \lambda_2}. \quad (3.70d)$$

In dieser Notation zählt λ die zwei Polarisierungen und $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \lambda)$ ist der Polarisationsvektor.

Damit findet man

$$[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}(\mathbf{k}', \lambda')] = [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')] = 0, \quad (3.71a)$$

$$[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (3.71b)$$

Mit diesen Relationen lauten die physikalischen Felder

$$\hat{E} = -\dot{\hat{a}}\hat{\mathbf{r}}\hat{A} = i \sqrt{\frac{\hbar\mu_0 c^2}{(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \left\{ \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\mathbf{k}_\mu x^\mu} - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k}_\mu x^\mu} \right\}, \quad (3.72a)$$

$$\hat{B} = \text{rot } \hat{A} = -i \sqrt{\frac{\hbar\mu_0 c^2}{(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \left\{ \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\mathbf{k}_\mu x^\mu} - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k}_\mu x^\mu} \right\}. \quad (3.72b)$$

Damit berechnet man

$$\langle \hat{H} \rangle = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{H} \stackrel{(3.69)}{=} \sum_{\lambda=1,2} \int d^3\mathbf{k} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \quad (3.73)$$

$$\langle \hat{P} \rangle = \sum_{\lambda=1,2} \int d^3\mathbf{k} \hbar\mathbf{k} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda). \quad (3.74)$$

4

Behandlung von Wechselwirkungen

Anmerkung: In der Notation wird ab diesem Kapitel auf eine Markierung von Operatoren verzichtet.

4.1 Motivation

4.1.1 Geladenen Fermionen

Die bisherigen Felder waren wechselwirkungsfrei. Damit kann die Existenz von Teilchen und der sich daraus ergebenden Messgrößen wie Energie und Impuls bestimmt werden. Die Teilchen koppeln jedoch aneinander.

► **Beispiel** Die Forderung nach einer lokalen Eichinvarianz des Dirac-Feldes führt auf eine Gleichung der Form

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{q}{\hbar} \gamma^\mu A_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \underline{\psi} = 0 \quad (4.1)$$

führt. Diese beschreibt die Kopplung geladener Teilchen an das elektromagnetische Feld.

Für das nicht-freie Maxwellfeld (3.56b) erhält man den Strom

$$j^\mu = cq\bar{\psi}\gamma^\mu\underline{\psi}, \quad (4.2)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu \stackrel{(3.55)(3.56b)}{=} \mu_0 cq\bar{\psi}\gamma^\nu\underline{\psi}. \quad (4.3)$$

Dieser beschreibt die Kopplung des Maxwellfeldes an geladene Dirac-Teilchen.

Das Ziel ist die Behandlung dieser Wechselwirkung auf Basis der freien Felder. ►

4.1.2 Lagrangedichten für Wechselwirkungen

Eine Lagrangedichte, aus der sowohl (4.1) als auch (4.3) folgen, ist

$$\mathcal{L} = \underbrace{i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\underline{\psi} - mc^2\bar{\psi}\underline{\psi}}_{\mathcal{L}_D} - \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)}_{\mathcal{L}_M} - \underbrace{cq\bar{\psi}\gamma^\mu\underline{\psi}A_\mu}_{\mathcal{L}_I} \quad (4.4)$$

mit

► der Lagrangedichte \mathcal{L}_D des Dirac-Feldes,