

Prof. Dr. Siegfried Dietrich, Universität Stuttgart

Theoretische Physik III

Elektrodynamik

Stuttgart, Sommersemester 2013

Revision: 21. September 2018

Für Hinweise auf Druckfehler und Kommentare jeder Art bin ich dankbar.¹

¹Henri Menke, henrimenke@gmail.com

Übertragung in \LaTeX durch Henri Menke, Michael Schmid, Marcel Klett und Jan Schnabel.

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ Namensnennung - Nicht-kommerziell - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

Inhaltsverzeichnis

0.1	Historischer Überblick	1
0.2	allgemeine Bezüge	2
1	Das elektromagnetische Feld	5
1.1	Lorentzkraft und Superpositionsprinzip	5
1.2	Elektrischer Fluss, Ladungsverteilung	8
1.3	Zirkulation eines Vektorfeldes, Strom und Magnetfeld	18
1.4	Induktionsgesetz	19
1.5	Maxwellsche Gleichungen	22
1.6	Feldgleichungen in differentieller Form	27
1.7	Energie- und Impulsbildung im elektromagnetischen Feld	37
2	Statische Felder und elektromagnetische Wellen	45
2.1	Elektro- und Magnetostatik	45
2.2	Multipolentwicklung	52
2.3	Kräfte und Drehmomente auf lokalisierte Ladung- und Stromverteilungen	62
2.4	Elektrostatik im begrenzten Raum	66
2.5	Elektromagnetische Wellen im Vakuum	81
2.6	Die elektromagnetischen Potentiale	92
3	Spezielle Relativitätstheorie	109
3.1	Der Raum-Zeit Begriff: Historische Evolution	109
3.2	Lorentztransformation	111
3.3	Raumzeitgeometrie	117
3.4	Vierervektoren	127
3.5	Relativistische Mechanik	132
	Index	137
	Literatur	139

0.1 Historischer Überblick

11. Jhd. : Kompass

1269 **P. Peregrinus**: Magnetpole

1600 **W. Gilbert**:

1609 **Galilei**: Fallgesetze

1609-19 **Kepler**: Planetengesetze

- 1.) keine magnetische Ladung
- 2.) Reibungselektrizität
- 3.) Elektroskop
- 4.) Erde als Magnet

1629 **N. Cabeo**: Anziehung und Abstoßung elektrisch geladener Körper

1665 **Grimaldi**: Lichtbeugung

1666 **Newton**: Gravitation

1667 **Rømer**: Messung von c

1690 **Huygens**: Licht als Welle

1729 **S. Gray**: Leiter, Isolatoren

1734 **du Fay**: Zwei Arten von Ladungen (Glas, Harz)

1747 **B. Franklin**: 1.) \pm Ladungen

- 2.) Erhaltungssatz von Ladungen
- 3.) $F = 0$ im Leiter
- 4.) Blitzableiter

1767 **J. Priestly**: $F \propto \frac{1}{r^2}$

1785 **Coulomb**: Durch Messung: $F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$

1791 **L. Galvani**: Berührungselektrizität

1799 **A. Volta**: Batterie als Stromquelle

1819 **Ch. Oersted**: Strom erzeugt Magnetfeld

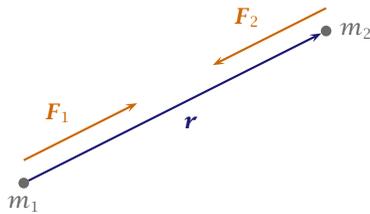
1821-24 **A.M. Ampère**: 1.) Kräfte zwischen Strömen

- 2.) Hypothese: Magnetismus ist elektrischen Ursprungs

1826 **G.S. Ohm**: Ohmsches Gesetz

1830-50 **M. Faraday**: 1.) Induktionsgesetz

- 2.) E -, B - Felder
- 3.) Dia- und Paramagnetismus



► 1 Illustration zum Gravitationsgesetz

1865 J.C. Maxwell: 1.) Endgültige Form der Feldgleichungen

2.) elektromagnetische Lichttheorie

1887 H. Hertz: Nachweis der elektromagnetischen Wellen

1895 K.W. Röntgen: Röntgenstrahlen

1895 H.A. Lorentz: Maxwellsche Theorien für kondensierte Materie, Elektronentheorie

1905 A. Einstein: 1.) Prinzip $c = \text{const}$

2.) spezielle Relativitätstheorie

1928: Quantenelektrodynamik (QED)

0.2 allgemeine Bezüge

Aus der Mechanik ist uns das zweite Newtonsche Gesetz bekannt als

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

Dieses liefert jedoch keine Aussage über die Natur der Kräfte.

Das dritte Newtonsche Gesetz kann für die Gravitation wie folgt formuliert werden.

$$\mathbf{F}_2 = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\mathbf{F}_1$$

Zur Illustration dieser Gleichung siehe auch Abbildung 1.

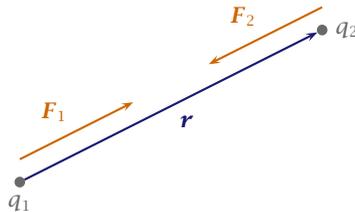
Gegenstand der Vorlesung ist jedoch die Elektrodynamik. Dies ist die Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung.

Betrachten wir zunächst einmal die Hierarchie der (bekannten) fundamentalen Kräfte. Eine Aufstellung findet sich in Tabelle 1.

Als Vermittler der elektromagnetischen Wechselwirkung fungieren die elektrischen Ladungen. Betrachten wir nun näher das Konzept der Ladungen.

Wechselwirkung	Vorkommen	relative Stärke	Reichweite
starke Wechselwirkung	Kernkräfte, Elementarteilchen	$1 - 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
Elektromagnetische Wechselwirkung	gewöhnliche Materie	10^{-2}	∞
Schwache Wechselwirkung	Elementarteilchen	10^{-5}	$\ll 1 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
Gravitation	Astronomie	10^{-40}	∞

► 1 Die vier Grundkräfte.



► 2 Illustration zur Coulomb-Wechselwirkung.

0.2.1 ruhende (Quell) - Ladung

Die Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen kann durch das *Coulomb-Gesetz* beschrieben werden.

$$\mathbf{F}_2 = f \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\mathbf{F}_1 \quad f > 0 \quad (0.1)$$

Wie man bereits aus der Gleichung herauslesen kann ergeben sich zwei Fälle

- $q_1 \cdot q_2 > 0$: Abstoßung
- $q_1 \cdot q_2 < 0$: Anziehung

Der Fall $q_1 \cdot q_2 = 0$ kann natürlich auch auftreten ist jedoch etwas trivial.

Eine Illustration zum Coulomb-Gesetz findet sich in Abbildung 2.

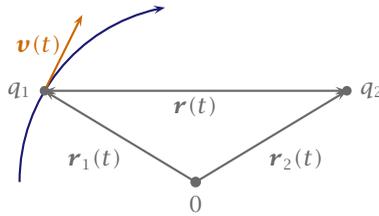
In Gleichung (0.1) wurde stillschweigend der Vorfaktor f eingeführt. Dieser ist eine Proportionalitätsgröße, die von ihrem Maßsystem abhängig ist. Im folgenden werden wir immer das *CGS-System* verwenden. Daher gilt

$$[F] = \text{gcm s}^{-2}$$

woraus folgt

$$[f \cdot q^2] = \text{gcm}^3 \text{s}^{-2}$$

Für das CGS-System gilt $f = 1$, und daher $[q] = \text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1}$.



► 3 Skizze einer bewegten Ladung gegenüber einer anderen, ruhenden Ladung.

0.2.2 bewegte Ladung

Die Kraft, die eine bewegte Ladung auf eine ruhende ausübt kann berechnet werden mit

$$F_2(t) = q_1 \cdot q_2 \left(\frac{\hat{r}}{\kappa(t) r^2} + \frac{1}{c \kappa(t)} \frac{d}{dt} \left[\frac{\hat{r} - \frac{1}{c} \mathbf{v}(t)}{\kappa(t) r} \right] \right)_{\text{ret.}} \tag{0.2}$$

In Abbildung 3 ist eine Skizze der betrachteten Konfiguration zu sehen.

In Gleichung (0.2) werden verschiedene Konstanten und Zeichen verwendet:

- c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
- $\kappa = 1 - \frac{1}{c} \hat{r} \cdot \mathbf{v}$
- ret. bedeutet $t' = t - \frac{r(t')}{c}$. Man kann t' also ausdrücken als $t' = t'(t)$.

Die Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung durch Kräfte ist kompliziert wegen der oben beschriebenen Retardierung. Das bedeutet die Kraftwirkung breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit aus.

Ein besserer Ansatz in diesem Fall ist eine Beschreibung durch Felder.

I Das elektromagnetische Feld

In diesem Kapitel werden die empirischen Grundlagen der Maxwell'schen Gleichungen, sowie mathematische Konzepte der Feldbeschreibung vermittelt.

1.1 Lorentzkraft und Superpositionsprinzip

Zu Beginn werden zwei fundamentale Erfahrungssätze aufgegriffen und interpretiert. Der erste Erfahrungssatz beschreibt die *Lorentzkraft*, der zweite das *Superpositionsprinzip*.

1.1.1 Erster Erfahrungssatz

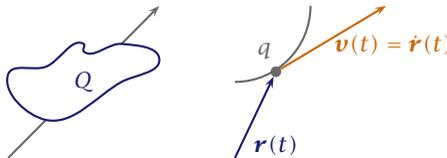
Ladungen in beliebiger Bewegung erzeugen ein elektrisches Feld \mathbf{E} und ein magnetisches Feld \mathbf{B} . Eine Testladung q spürt diese Felder. \mathbf{E} und \mathbf{B} bestimmen die Bewegung der Testladung gemäß der *Lorentzkraft*:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \cdot \mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}} \right) = \mathbf{F}_L(\mathbf{r}(t), t) = q \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + \frac{1}{c} \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t) \right]$$

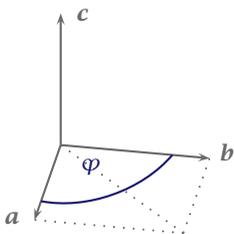
Bemerkung: Erinnerung zum *Kreuzprodukt*.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \sin \varphi = c \quad c_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma$$

Eine kleine Skizze dazu findet sich in Abbildung 5.



► 4 Links: Eine Ladungsverteilung der Gesamtladung Q . Rechts: Gleichförmige Bewegung einer Ladung auf der Trajektorie $\mathbf{r}(t)$.



► 5 Skizze zum Kreuzprodukt.

1.1.2 Zweiter Erfahrungssatz

Es existieren zwei Ladungsverteilung $Q^{(1)}$ und $Q^{(2)}$. Beide Ladungsverteilungen erzeugen ein elektrisches und magnetisches Feld, also

$$Q^{(1)} \rightarrow \mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{B}^{(1)}$$

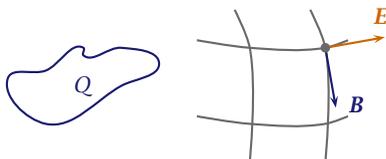
$$Q^{(2)} \rightarrow \mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{B}^{(2)}$$

Superponiert man die beiden Ladungsverteilungen, so erhält man auch eine Superposition der Felder.

$$Q^{(1)} \cup Q^{(2)} \xrightarrow{\text{Erfahrung}} \begin{cases} \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \end{cases}$$

Dieses Phänomen wird als lineare Superposition oder auch *Superpositionsprinzip* bezeichnet.

Zusammenfassung der Feldbeschreibung: Ladungen erzeugen im Raum einen »Erregungszustand«, der durch die zwei Vektorfelder \mathbf{E} und \mathbf{B} an jedem Punkt und zu jeder Zeit beschrieben werden kann.

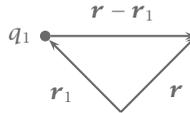


► 6 Die von der Ladungsverteilung Q erzeugten Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} bewirken eine Kraft F_ℓ auf eine Testladung.

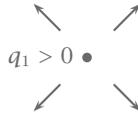
Vorraussetzung: Eine Störung der felderzeugenden Ladung durch die Testladung muss vernachlässigbar sein. -o

\mathbf{E} und \mathbf{B} sind auch vorhanden, wenn keine Testladung vorhanden ist, z.B.

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \quad \text{für } \mathbf{v} = 0$$



- 7 Eine ruhende Ladung q_1 bei r_1 und eine Testladung am Punkt r .



- 8 Das elektrische Feld einer Testladung.

- *Beispiel* Eine felderzeugende, ruhende Ladung q_1 erzeugt das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$$



Man sieht, dass dies proportional ist zu $1/r^2$ für $r \rightarrow \infty$. Da die Ladung ruht ist das Magnetfeld $\mathbf{B} = 0$. Eine Skizze ist in Abbildung 8 zu sehen.

- *Beispiel* Das *Keplerproblem* für eine Testladung im elektrischen Feld kann formuliert werden mit

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$



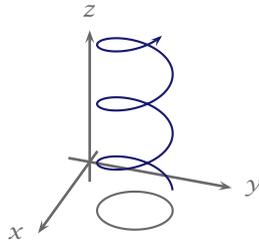
Siehe dazu auch Skizze 7.

Bewegen wir eine Testladung q mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} durch ein zeitlich konstantes Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B)^\top$, so gilt für die Bewegung von q

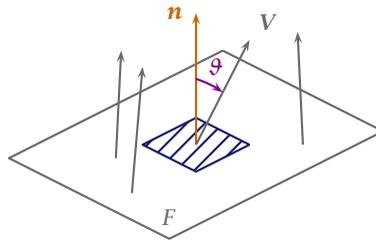
$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} &= \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} & |\cdot \mathbf{v} \\ m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \mathbf{v}^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

das bedeutet, dass ein zeitlich Magnetfeld keine Arbeit an der Ladung verrichtet. Weiterhin

$$\dot{\mathbf{v}} = \omega_B \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z, \quad \omega_B = \frac{qB}{mc} \text{ ist die } \textit{Zyklotronfrequenz}$$



- 9 Eine bewegte Ladung in einem Magnetfeld in z -Richtung beschreibt eine Schraubenlinie. Die Projektion dieser Schraubenlinie auf die x, y -Ebene ergibt einen Kreis.



- 10 Fluss eines Vektorfeldes V durch eine durch den Normalenvektor n orientierte Fläche F .

1.2 Elektrischer Fluss, Ladungsverteilung

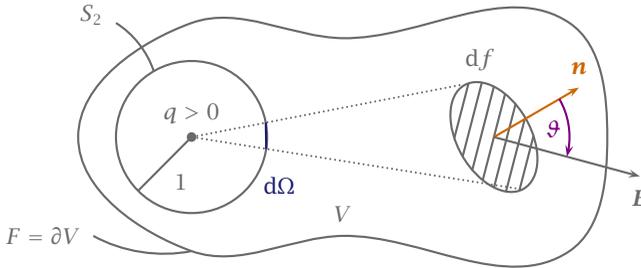
Es seien gegeben: Eine orientierbare Fläche F (d.h. kein Möbiusband) und mit $V(\mathbf{r}, t)$ ein beliebiges Vektorfeld (siehe Abbildung 10).

Der *Fluss* Φ von V durch F ist definiert als

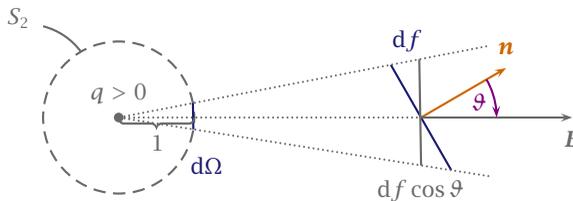
$$\begin{aligned}\Phi_F(V) &= \iint_F \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{f} \\ &= \int_F \mathbf{V} \cdot d\mathbf{f}\end{aligned}$$

Bemerkung: Mit elektrischem Fluss ist nicht elektrischer Strom gemeint. →

$d\Omega$ ist das Raumwinkelement unter dem $d\mathbf{f}$ auf der Einheitskugel S_2 von q aus gesehen wird.



► 11 Projektion der Fläche df auf die Einheitssphäre S_2 aus der Sicht von Beobachter q , für den Fall, dass q im Volumen V ist.



► 12 Hilfskonstruktion zur Bestimmung des Raumwinkelelements $d\Omega$ für den Fall, dass q im Volumen V ist.

$$\begin{aligned}
 d\Omega &= \frac{df \cos \vartheta}{r^2} \quad \text{für } 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{df (-\cos \vartheta)}{r^2} \quad \text{für } \pi \geq \vartheta \geq \frac{\pi}{2} \\
 \int_{\partial V} \mathbf{df} \cdot \mathbf{E} &= \int_{\partial V} df E \cdot \cos \vartheta = \int_{\partial V} df \frac{q}{r^2} \cos \vartheta \\
 &= \int_{S_2} d\Omega q = 4\pi q
 \end{aligned}$$

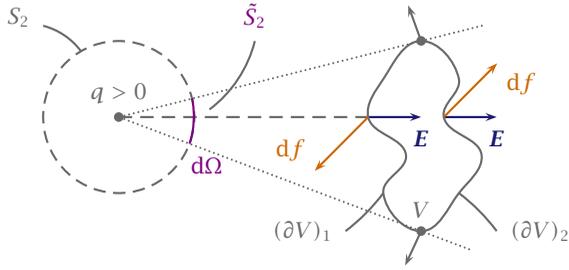
Der elektrische Fluss ist unabhängig von der Position der Quelle.

Es wird nun der Fall betrachtet, dass sich die Ladung q nicht innerhalb des Volumens V befindet, wie in Abbildung 13 illustriert.

$$\partial V = (\partial V)_1 + (\partial V)_2$$

$$(\partial V)_2: \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = E df \underbrace{\cos \vartheta}_{\geq 0} = q d\Omega$$

$$\Rightarrow \int_{(\partial V)_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \int_{\tilde{S}_2} q d\Omega = q \cdot \frac{|\tilde{S}_2|}{|S_2|} |S_2|$$



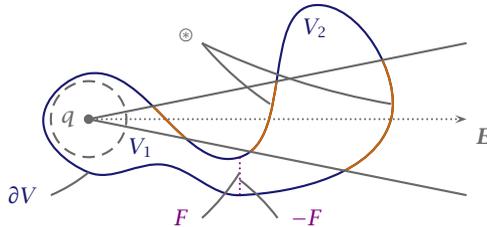
► 13 Hilfskonstruktion zur Bestimmung des Raumwinkelements $d\Omega$ für den Fall, dass q nicht im Volumen V ist.

$$\begin{aligned}
 (\partial V)_1: \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} &= E \, df \underbrace{\cos \vartheta}_{<0} = -q \, d\Omega \\
 \Rightarrow \int_{(\partial V)_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} &= - \int_{\tilde{S}_2} q \, d\Omega = -q \cdot \frac{|\tilde{S}_2|}{|S_2|} |S_2| \\
 \Rightarrow \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} &= 0
 \end{aligned}$$

Vorraussetzung: Geometrie und Coulombgesetz

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \begin{cases} 4\pi q & , \text{ falls } q \text{ in } V \\ 0 & , \text{ falls } q \text{ nicht in } V \end{cases} \quad \rightarrow$$

Alle Überlegungen leben davon, dass sich V ohne Selbstüberschneidung auf S_2 projizieren lässt. Siehe dazu auch Abbildung 15.



► 14 ⊙: Diese Beträge zu $\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}$ heben sich auf.

Bemerkung:

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \int_{\partial(V_1)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} + \underbrace{\int_{\partial(V_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}}_{=0} = \int_{\partial(V_1)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}$$

da

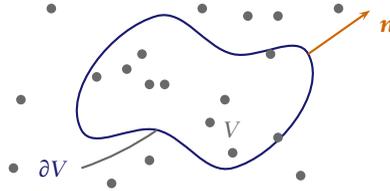
$$\int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = - \int_{-F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}$$

denn $(d\mathbf{f})_1 = -(d\mathbf{f})_2$, da $d\mathbf{f}$ stets aus dem Volumen hinausweist.

Für mehrere Ladungen: Hier gilt das Superpositionsprinzip.

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \sum_{j \in V} q_j$$

Diese Darstellung ist unabhängig von der Form von ∂V . Siehe Abbildung 15.



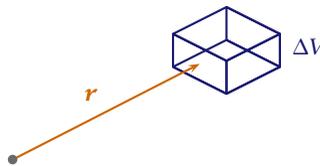
► 15 Die Punkte symbolisieren Punktladungen q_j innerhalb eines Volumens V

Dieses *Gaußsche Gesetz* des elektrischen Feldes gilt erfahrungsgemäß auch für zeitabhängige Felder, d.h. für beliebig bewegte Ladungen im stationären V und $\partial V = F$. Dies stellt bereits eine der Maxwell'schen Gleichungen dar.

Es sind auch die Fälle abgedeckt, dass Ladungen hinein- oder herausfließen.

Kontinuierliche Ladungsverteilungen:

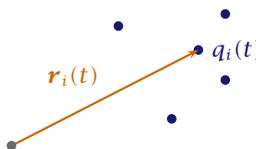
$$\varrho(\mathbf{r}, t) \Delta V \triangleq \text{Ladung in } \Delta V$$



► 16 Volumenelement ΔV mit Ortsvektor \mathbf{r} .

Nach Gauß gilt:

$$\int_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{f} = 4\pi \int_V \varrho(\mathbf{r}, t) dV$$



► 17 Ladungsdichte bestehend aus Punktladungen q_i .

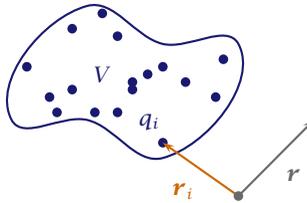
Man kann diskrete Punktladungen als singuläre Dichte beschreiben.

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = \delta(x - x_i)\delta(y - y_i)\delta(z - z_i)$$

Statische Ladungen und Superposition

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i \in V} q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \xrightarrow{\text{kont.}} \int_V \varrho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} dV$$



► 18 Statische Ladungen in einem Volumen V.

$\varrho(\mathbf{r})$: Raumladungsdichte

$\sigma(\mathbf{r})$: Flächenladungsdichte

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_F \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} d^2r'$$

$\eta(\mathbf{r})$: Linienladungsdichte

In das Gaußsche Gesetz (im statischen Fall) ging ein:

- $\mathbf{F} \sim 1/r^2$ und Zentralkraft
- lineare Superposition

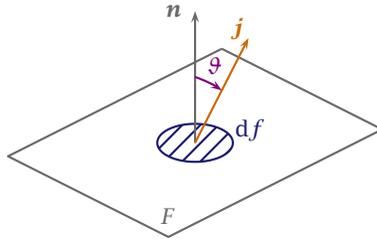
Das gilt auch für (statische) Gravitationsfelder ($\varrho \triangleq$ Massendichte).

Bemerkung: Das Gaußsche Gesetz legt im Allgemeinen das Feld \mathbf{E} nicht fest (außer in gewissen symmetrischen Fällen)

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}$$

legt nur die »Quellen« ($\text{div } \mathbf{E}$) des Feldes fest, nicht jedoch die »Wirbel« ($\text{rot } \mathbf{E}$)

→



► 19 Strom j durch eine Fläche F .

1.2.1 Elektrischer Strom

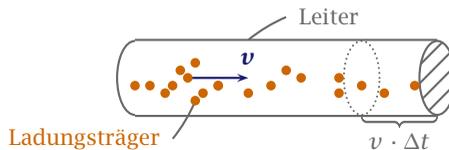
Elektrischer Strom ist Ladungstransport. In diesem Zusammenhang ist der Begriff der *Stromdichte* j wichtig. Diese besitzt die folgenden Eigenschaften:

► Stromrichtung: \hat{j} mit $\hat{j}^2 = 1$

► $j = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \times \text{Fläche}(\perp j)}$

Der Strom durch eine Fläche F ist gleich der Quotient von Ladung durch F und der Zeit:

$$\text{Fläche } F = \frac{\text{Ladung durch } F}{\text{Zeit}}.$$



► 20 Ladungen fließen durch einen Leiter mit der Geschwindigkeit v .

Der Gesamtstrom I , der durch ein endliches Flächenstück F hindurchtritt, ist wie folgt definiert:

$$I = \int_F \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, df.$$

v bezeichnet im Folgenden die Teilchenzahldichte geladener Teilchen und q die Ladung des Teilchen. Betrachtet man nun die Ladung in einem Zeitabschnitt Δt durch die Querschnittsfläche F des in Abbildung 20 skizzierten Leiters, gilt:

$$\underbrace{vq}_{e} \cdot v \cdot \Delta t \cdot F = j \cdot \Delta t \cdot F \quad \text{mit} \quad \hat{j} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \text{und} \quad \mathbf{j} = e\mathbf{v}.$$

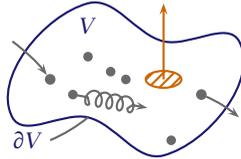
Allgemein gilt jedoch:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \varrho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

Dies beschreibt die Dichte des *Konvektionsstromes*.

Erfahrung Ladung kann weder entstehen noch verschwinden. ✕

Zu diesem Zweck betrachten wir ein im Raum festes Volumen V durch dessen Oberfläche ∂V sich Ladungen nach V hinein- oder aus V herausbewegen können (siehe Abbildung 21).



► 21 Ein Volumen V mit orientiertem Rand ∂V . Der Rand von V ist dabei raumfest.

Für die Gesamtladung in V gilt:

$$Q_V = \int_V \varrho(\mathbf{r}, t) dV.$$

Hierbei gilt das Gesetz der Ladungserhaltung, d.h. $Q_V(t)$ ändert sich zeitlich nur durch Ein- und Ausströmen von Ladungen.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q_V(t) &= - \int_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} df \\ &= \int_V \partial_t \varrho(\mathbf{r}, t) d^3 r \end{aligned}$$

Das Minuszeichen rührt daher, dass das Volumen durch die Oberfläche Ladung verliert (also Minus) oder hinzugewinnt (dann Plus), also:

$$\dot{Q}_V < 0 \quad \text{wenn} \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} > 0.$$

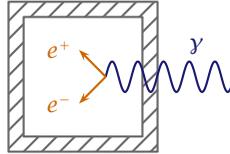
Somit erhalten wir die *Kontinuitätsgleichung in integraler Form*:

$$\boxed{\frac{d}{dt} Q_V(t) = - \int_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} df}$$

Satz der Ladungserhaltung Der durch eine geschlossene Fläche hindurchtretende Gesamtstrom ist gleich dem zeitlichen Ladungsverlust des von der Fläche umschlossenen Gebiets. ✕

Paarerzeugung: $Q_{\text{vorher}} = 0 = Q_{\text{nacher}} = e + (-e)$

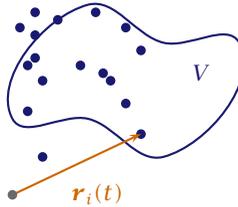
e ist hierbei die Elementarladung. Ein Elektron hat die Elementarladung $-e$. ↪



- 22 Paarzeugung eines Elektron-Positron-Paares aus einem γ -Quant ausreichender Energie

Punktladungen: Für Punktladungen gilt für die Raumladungsdichte $\varrho(\mathbf{r}, t)$ eines festen Volumens V :

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)).$$



- 23 Illustration für die Raumladungsdichte eines festen Volumen V .

$$\begin{aligned} Q_V(t) &= \int_V \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \, d^3r \\ &= \sum_{\{i|\mathbf{r}_i(t) \in V\}} q_i \end{aligned}$$

Für die Stromdichte folgt:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$$

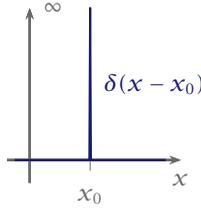
1.2.2 Diracs Delta-Distribution δ

1.) $\delta(x - x_0) = 0 \iff x \neq x_0$

2.) $\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) \, dx = \begin{cases} f(x_0) & , x_0 \in (a, b) \\ 0 & , x_0 \notin (a, b) \end{cases}$

Einen Spezialfall stellt $f(x) = 1$ dar, denn:

$$\int_a^b \delta(x - x_0) \, dx = \begin{cases} 1 & , x_0 \in (a, b) \\ 0 & , x_0 \notin (a, b) \end{cases}$$



► 24 Skizze der Delta-Distribution

Insbesondere gilt:

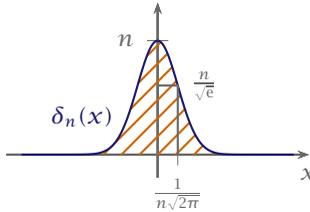
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$$

δ ist ein stetiges lineares Funktional auf den Raum der Testfunktion (\rightarrow Distribution)

3.) Regularisierung:

$\delta(x)$ als Folge gewöhnlicher Funktionen, z.b:

$$\delta_n(x) = m e^{-\pi n^2 x^2}, \quad n \rightarrow \infty$$



► 25 Approximation der Delta-Distribution durch eine Funktionenfolge.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_n(x) dx = f(0)$$

Weitere Möglichkeiten sind gegeben durch:

- $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{x - i\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$
- $\delta_m(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(mx)}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m e^{ikx} dk, \quad m \rightarrow \infty$

4.) Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \text{► } \int_a^b f(x) \delta'(x) dx &= f(x) \delta(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \delta(x) dx \\ &= \begin{cases} -f'(0) & , 0 \in (a, b) \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$$

x_i : $g(x_i) = 0$ ist einfach Nullstelle

5.) wichtige Anwendungen:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} e^{ik_x(x-x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} e^{ik_y(y-y_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} e^{ik_z(z-z_0)} \\ \blacktriangleright \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &= (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \\ &= -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

stationäre Ströme Ist die Stromdichte \mathbf{j} zeitunabhängig und führt sie nirgends zu Ladungsanhäufungen, so handelt es sich um *stationäre Ströme*. Es gilt:

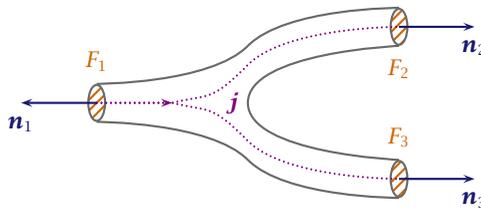
$$\partial_t \mathbf{j} = 0 \quad \text{und} \quad \partial_t \varrho = 0.$$

Wenn $\partial_t \varrho = 0$ so folgt aus unmittelbarer Konsequenz aus der Kontinuitätsgleichung:

$$\int_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{f} = 0.$$

Hieraus folgt, dass der Gesamtstrom I durch jeden Querschnitt ΔF des Vektorfeldes \mathbf{j} konstant ist. (Gilt für beliebig, geschlossene Oberflächen ∂V ($\partial \partial V = 0$))

Betrachten wir das in Abbildung 26 abgebildete Kabel, wobei durch die Manteloberfläche kein Strom fließt.



► 26 Geteiltes Kabel, durch welches der Strom \mathbf{j} fließt. Der Mantel ist stromlos.

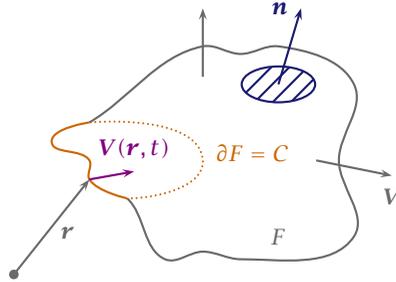
Für den Strom durch alle drei Querschnittsflächen F_i gilt:

$$\int_{F_1 \cup F_2 \cup F_3} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{f} = I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Dies veranschaulicht die **1. Kirchhoffsche Regel**, nach der die Summe aller in einen Leiterzweig hinein- oder ausfließenden Ströme verschwindet.

1.3 Zirkulation eines Vektorfeldes, Strom und Magnetfeld

Wir betrachten die Fläche F in Abbildung 27.



► 27 Der »Kescher« F , dessen Öffnung durch $\partial F = C$ gegeben ist.

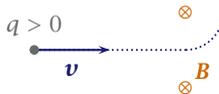
C sei hierbei ein geschlossener Weg ($0 = \partial C = \partial\partial C$). C ist so orientiert, dass C und die Flächennormale eine Rechtsschraube bilden. Wir betrachten die Zirkulation des Vektorfeldes V entlang C :

$$\int_{\partial F} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = \Gamma_C(\mathbf{V})$$

$\Gamma_C(\mathbf{V})$ bezeichnet hierbei den Weg.

Das Magnetfeld \mathbf{B} wird ausgemessen mittels:

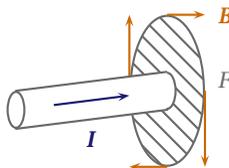
- 1.) Drehmoment auf (Standard-) Kompass
- 2.) Lorentzkraft: Ablenkung bewegter Ladungen



► 28 Eine Ladung q wird durch ein Magnetfeld B abgelenkt.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- 1.) Oersted, Ampère: Strom erzeugt Magnetfeld



► 29 Eine stromdurchflossener Leiter erzeugt ein Magnetfeld, das zirkular orientiert ist.

allgemein: $F, \partial F$ stationäre Ströme:

$$\underbrace{\frac{4\pi}{c} \int_F \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, df}_{= \frac{4\pi}{c} I_F} = \int_{\partial F} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \Gamma_{\partial F}(\mathbf{B})$$

Das Magnetfeld ist zeitunabhängig.

2.) weitere Erfahrungen:

- ▶ Es gibt keine magnetischen Ladungen (d.h. Monopole?)
- ▶ Die \mathbf{B} -Feldlinien sind geschlossen:

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, df = 0 \quad \text{für beliebiges } V, \partial V \text{ geschlossen}$$

In Worten:

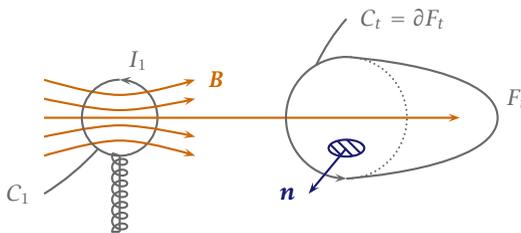
- ▶ \mathbf{B} -Feld hat keine Quellen
- ▶ (stationäre) Ströme erzeugen \mathbf{B} -Feldwirbel

Gaußsches Gesetz: \mathbf{E} -Feld hat Quellen (Ladungen). Hat \mathbf{E} auch Wirbel? →

Ein Vektorfeld ist erst durch seine Quellen und Wirbel festgelegt (später).

1.4 Induktionsgesetz

Im folgenden betrachten wir eine Leiterschleife C_1 die von einem Magnetfeld \mathbf{B} durchsetzt wird und eine im \mathbb{R}^3 glatte Fläche F_t auf der sich eine geschlossene Kurve C_t ($C_t = \partial F_t$ und $\partial \partial F_t = 0$) befindet. Sowohl die Fläche F_t als auch C_t können zeitlich veränderlich sein. Durch die Leiterschleife fließt ein Strom I_1 .



▶ 30 Eine Leiterschleife C_1 erzeugt ein Magnetfeld \mathbf{B} , dessen Feldlinien ins Volumen F_t hineinreichen.

Die eingezeichnete (angegebene) Stromrichtung gehört zu einer Abnahme des magnetischen Flusses.

Beobachtungen: In C_t fließt ein Strom, wenn

- 1.) C_1 ruht und C_t bewegt wird
- 2.) C_1 bewegt wird und C_t in Ruhe ist

3.) C_1 und C_t in Ruhe sind und $I_1(t)$ variiert →

I wird durch ein elektrisches Feld $\mathbf{E}^{(e)} \left(= \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}} \right)$ in Leiter C_t bewirkt (»elektromotorische Kraft«).

Aus diesen Erfahrungen ergeben sich zusammenfassend (auch als Faradaysches Induktionsgesetz bekannt):

$$\mathcal{E} \equiv \Gamma_{\partial F_t}(\mathbf{E}) = \boxed{\int_{\partial F_t} \mathbf{E}^{(e)} \, d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{F_t} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, df}$$

$\Gamma_{\partial F_t}(\mathbf{E})$ bezeichnet hierbei die Ringspannung \mathcal{E} . Das Wegintegral:

$$\int_{\partial F_t} \mathbf{E}^{(e)} \, d\mathbf{r}$$

bezeichnet man als die elektromotorische Kraft im Leiter.

$$\Phi_{F_t}(\mathbf{B}) = \int_{F_t} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, df$$

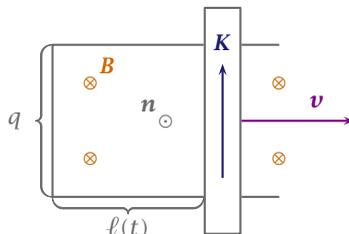
Dies bezeichnet man als den magnetischen Fluss.

Wesentlich für $\mathcal{E} \neq 0$ ist nur die Änderung der magnetischen Flusses, z.B. aufgrund von Relativbewegungen, $\mathbf{B}(t)$ oder Deformation der Schleife C_t .

Lenzsche Regel *Ein induzierter Strom (hervorgerufen durch $\mathbf{E}^{(e)}$) wirkt der Flussänderung entgegen.* ✕

Frage: Ist das Induktionsgesetz eine neue Aussage oder ist es aus der Lorentzkraft herleitbar? →

zur Beobachtung 1.: Wir betrachten einen Bügel, der über eine Leiterschleife gezogen wird wie in Abbildung 31 zu sehen ist.



► 31 Zur Herleitung der Lorentzkraft: Beweglicher Bügel über einer Leiterschleife.

Auf die beweglichen Ladungen im Bügel wirkt eine Lorentzkraft, die senkrecht zu \mathbf{v} und \mathbf{B} steht. Für die Ringspannung (die Orientierung für die Integration ist gegen den Uhrzeigersinn):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \int_{\square} \frac{1}{q} \mathbf{K} \, d\mathbf{r} \\
 &= \frac{1}{c} \int_{\square} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \, d\mathbf{r} \\
 &= \frac{1}{c} v B b = \frac{1}{c} B b \frac{d\ell}{dt}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Es zeigt sich, dass nur der Bügel einen Beitrag liefert. Andererseits gilt für den magnetischen Fluss (integriert über die Fläche die von Bügel und Schleife eingeschlossen wird):

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_{\square} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, df = -B b \ell(t) \tag{1.2}$$

Aus (1.1) und (1.2) folgt somit für die Ringspannung:

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{B}),$$

d.h. dieser Aspekt des Induktionsgesetzes folgt aus der Lorentzkraft.

zur Beobachtung 2.: Folgt aus 1. gemäß dem Relativitätsprinzip.

Bemerkung: Bei beliebiger Bewegung ist C_1 , i.A. kein Inertialsystem, Betrachtung momentaner Inertialsysteme. →

zur Beobachtung 3.: Es wirkt eine Kraft auf ruhende Ladungen im zeitlich veränderlichen \mathbf{B} -Feld. Andererseits muss sich jede Kraft auf Ladungen stets in der Form

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

schreiben lassen, d.h. die allgemeinste Form des *Induktionsgesetz* lautet:

$$\boxed{\mathcal{E} = \int_{\partial F_t} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \, d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{F_t} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, df}$$

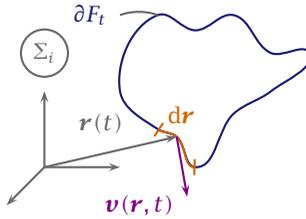
Ist \mathbf{B} zeitabhängig und der Leiter in Ruhe ist dennoch ein Strom zu messen. Die Ladung in einem Leiter muss also durch ein \mathbf{E} -Feld angetrieben sein. Die Folgerung ist, dass ein zeitabhängiges \mathbf{B} -Feld mit einem \mathbf{E} -Feld verknüpft ist.

Bemerkung: 1.) q geht nicht ein \Rightarrow Zirkulation von \mathbf{E} tritt auch auf, wenn *kein* materieller Leiter entlang ∂F_t vorhanden ist.

2.) Der Beschreibung liegt ein Inertialsystem Σ_i zugrunde:

- ▶ Entlang ∂F_t , bzw. auf F_t :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t)$$



► 32 Das Interalsystem Σ_i

- Geschwindigkeit des Leiterelements $d\mathbf{r}$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)$$

→

Fazit: Mit den bisher angegebenen Gesetzen des elektromagnetische Feldes sind fast schon die Maxwell'schen Gleichungen in integraler Form vorhanden. →

1.5 Maxwell'sche Gleichungen

Wir haben in den vorhergehenden Abschnitten die folgenden Feldgleichungen in ihrer integralen Form gewonnen:

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \stackrel{\text{Gauß}}{=} 4\pi \int_V \rho \, dV \tag{1.3}$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \stackrel{\text{Gilbert}}{=} 0 \tag{1.4}$$

$$\int_{\partial F_t} \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] d\mathbf{r} \stackrel{\text{Faraday}}{=} -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{F_t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \tag{1.5}$$

Dabei ergibt sich \mathbf{v} aus der Beschreibung der Berandung ∂F_t

$$\underbrace{\int_{\partial F_t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \int_{F_t} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}}_{\text{Oersted, Ampère}} + \underbrace{\frac{1}{c} \int_{F_t} \partial_t \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}}_{\text{Maxwells Ergänzung}} \tag{1.6}$$

Hierzu wurde lediglich die Lorentzkraft verwendet, welche die mechanische Wirkung elektromagnetischer Felder beschreibt und wie folgt lautet:

$$\mathbf{K} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

bzw. die dazugehörige Kraftdichte, auch **Lorentzkraftdichte**:

$$\mathbf{k} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

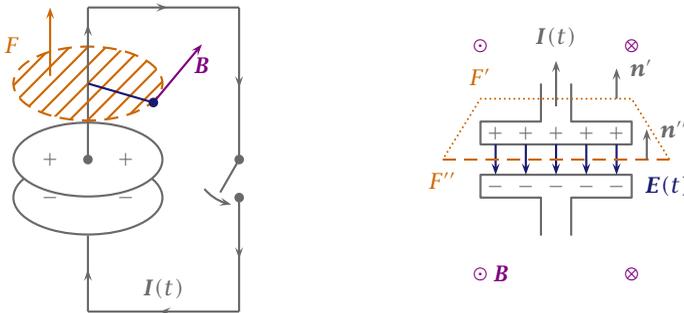
Die Gleichungen (1.3), (1.4), (1.5) und (1.6) stellen dabei die **Maxwell'schen Gleichungen in ihrer integralen Form** dar. Mit der Maxwell'schen Ergänzung (auch Verschiebungsstromdichte genannt)

$$\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}$$

gelten sie für beliebige, räumlich und zeitlich variierende Ladungen und Stromdichten. Zusammen mit dem zweiten Newtonschen Axiom $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ und dem Gravitationsgesetz bilden sie die Grundlage der klassischen Physik. (Es fehlt lediglich noch der Begriff der Entropie).

Bemerkung: Da die Maxwellgleichungen linear sind gehorchen sie dem Superpositionsprinzip. →

Die Raumladungsdichte ρ und die Stromdichte \mathbf{j} , die durch die Kontinuitätsgleichung miteinander gekoppelt sind erzeugen \mathbf{E} und \mathbf{B} ; über die Lorentzkraft wirken \mathbf{E} und \mathbf{B} zurück auf die Bewegungen der Ladungen. Dieses Prinzip bezeichnet schließlich die *elektromagnetische Wechselwirkung*. Darüber hinaus stellen die Maxwell'schen Gleichungen eine einheitliche Feldtheorie der Materie dar.



► 33 Plattenkondensator. Links eingebaut im Stromkreis, rechts im Querschnitt mit charakteristischen Größen.

Motivation und Interpretation der Maxwell'schen Ergänzung: Das Schließen des Schalters führt zu einem Entladungsstrom $I(t)$, der wiederum ein Magnetfeld induziert. Nach Oersted und Ampère wird dies wie folgt beschrieben:

$$\underbrace{\int_{\partial F} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}}_{=2\pi Br} = \frac{4\pi}{c} \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} I$$

Betrachten wir den Querschnitt eines Plattenkondensators, so lassen sich wie in der Abbildung gezeigt zwei Flächen definieren (die Fläche F' und die Fläche F''). Die Beschreibung hier erfolgt analog zu oben:

$$\int_{\partial F'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \int_{F'} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} I$$

Bei Betrachtung der Fläche F'' liegt das gleiche Magnetfeld vor, dennoch ergibt sich:

$$\int_{\partial F''} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \underbrace{\frac{4\pi}{c} \int_{F''} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}}_{\text{ohne Maxwell'sche Ergänzung}} = 0 \tag{*}$$

Das heißt, dass Gleichung (*) nicht berücksichtigt, was sich zwischen den Kondensatorplatten abspielt; nämlich ein zeitlich veränderliches \mathbf{E} -Feld während der Entladung. Denn während der Entladung werden Oberflächenladungen abgebaut, was dazu führt, dass $|\mathbf{E}(t)|$ minimal wird.

Maxwells Hypothese $\frac{1}{4\pi} \partial_t \mathbf{E}$ erzeugt wie \mathbf{j} eine magnetische Zirkulation. ×

Wiederholung: Die Maxwellgleichungen in ihrer integralen Form lauten:

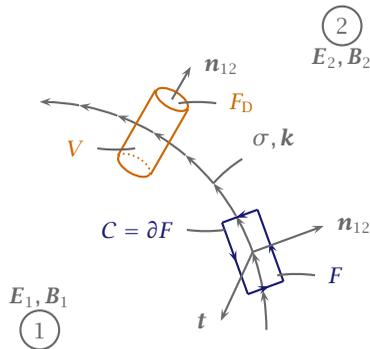
$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \, d\mathbf{f} = 4\pi \int_V \varrho \, dV \tag{1.7}$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \, d\mathbf{f} = 0 \tag{1.8}$$

$$\int_{\partial F_t} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{F_t} \mathbf{B} \, d\mathbf{f} \tag{1.9}$$

$$\int_{\partial F_t} \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \int_{F_t} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \, d\mathbf{f} \tag{1.10}$$

Randbedingungen Wir betrachten den Übergang an einer Grenzschicht in der ein Ladungsfluss ist.



► 34 Grenzschicht zwischen zwei verschiedenen Feldern. Eine Leiterschleife und ein Zylinder wurden eingefügt, um die Eigenschaften des Übergangs zu untersuchen.

Im Folgenden betrachten wir das Volumen eines Zylinders (siehe Abbildung 34) mit der Deckelfläche F_D , der durch die Grenzschicht reicht. Wir werden den Fall untersuchen, wenn der Zylinder zusammengedrückt wird, wobei wir aber beachten, dass ϱ einen δ -artigen Kern hat. Unter Verwendung von (1.7) und (1.8) folgt:

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int_V \varrho \, d^3r$$

Das Zusammendrücken des Zylinders führt die rechte Seite auf das Ergebnis:

$$= 4\pi \sigma F_D$$

für die linke Seite folgt dementsprechend:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} F_D = 4\pi \sigma F_D.$$

Hierbei wurde beachtet, dass des Zylinders so klein gewält wurde, dass \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 konstant anzunehmen sind.

Somit erhalten wir für die Normalkomponente des elektrischen Feldes folgende Randbedingung:

$$\Rightarrow \boxed{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = 4\pi\sigma}$$

Durch analoges vorgehen erhalten wir für das magnetischen Feld:

$$0 = \int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} F_D$$

Somit ergibt sich für die Normalkomponente des magnetischen Feldes:

$$\Rightarrow \boxed{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} F_D = 0}$$

Diese beiden Gleichungen machen also eine Aussage über die Normalkomponenten.

Nun betrachten wir eine Leiterschleife wie sie in Abbildung 34 zu sehen ist (mit der Länge $\Delta\ell$). Aus (1.9) folgt (und, dass \mathbf{B} ohne δ -Singularität):

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \rightarrow 0 \quad \text{für } |F| \rightarrow 0$$

Für die linke Seite folgt unter der Annahme, dass $\Delta\ell$ so klein gewählt wurde, dass der Integrand Konstant ist:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \Delta\ell \\ &= \mathbf{t} \cdot (\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)) \end{aligned}$$

\mathbf{t} sei beliebig innerhalb der Grenzschicht (Drehen der Leiterschleife um $\mathbf{n}_{12} \Rightarrow$ beliebiges \mathbf{t} erreichbar). Somit erhalten wir folgende Randbedingung für die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes:

$$\boxed{\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0} \quad \text{Stetigkeit der Tangentialkomponente}$$

Aus (1.10) folgt somit:

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} + \underbrace{\frac{1}{c} \int_F \partial_t \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}}_{\rightarrow 0 \text{ für } |F| \rightarrow 0}$$

Somit bleibt:

$$\underbrace{\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}}_{-\mathbf{t} \cdot (\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1))} = \underbrace{\frac{4\pi}{c} \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r}}_{-\frac{4\pi}{c} \mathbf{kt} \cdot \Delta\ell}$$

Somit erhalten wir die Stetigkeit der Tangentialkomponente des magnetischen Feldes, falls keine Oberflächenströmungen vorliegen:

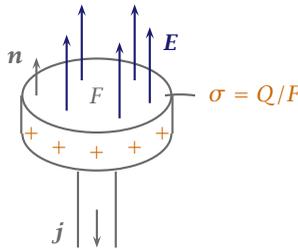
$$\boxed{\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{k}}$$

1.5.1 Maxwells Ergänzung (Verschiebungsstrom)

Um *Maxwells Ergänzungsterm* näher untersuchen zu können, betrachten wir ein Kondensatorplatte (positiv geladen) mit einer Flächenladungsdichte $\sigma = Q/F$, der Fläche F und dem Strom I für den gilt:

$$I = - \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}}_{\substack{<0 \\ >0}}$$

in Abbildung 35.



► 35 Eine Kondensatorplatte mit der Fläche F und der Oberflächenladungsdichte $\sigma = Q/F$.

Wir wissen, dass das elektrische Feld in einem Metall gleich null ist, daraus folgt, dass aufgrund der Stetigkeit der Tangentialkomponente auch diese null ist:

$$(\mathbf{E})_{\text{tang.}} = 0.$$

Das elektrische Feld \mathbf{E} steht senkrecht auf der Metalloberfläche (Kondensatorplatte), es ist also kollinear zum Normalenvektor \mathbf{n} . Im Zuge unserer vorherigen Randwertuntersuchung an einer Grenzschicht bedeutet, dass wenn \mathbf{n} aus dem Metall zeigt, $\mathbf{E}_1 = 0$ ist, wir erhalten also:

$$\mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2 = 4\pi\sigma$$

$$\sigma > 0 \Rightarrow \mathbf{E} \parallel \mathbf{n}$$

$$\sigma < 0 \Rightarrow \mathbf{E} \text{ antiparallel zu } \mathbf{n}.$$

Betrachten wir nun die zeitliche Ableitung von \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{E} &= \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= 4\pi \mathbf{n} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ &= 4\pi \mathbf{n} \frac{1}{F} \frac{\partial Q}{\partial t} \\ &= 4\pi \mathbf{n} \frac{-I}{F} \end{aligned}$$

Für die Integration über diese Maxwellsche Ergänzung gilt:

$$\Rightarrow \frac{1}{c} \int_{F''} \partial_t \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c} \int_{F'} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \quad (1.11)$$

Hierbei wurde beachtet, dass die Flächennormale von F'' (bei $d\mathbf{f}$) antiparallel zu \mathbf{n} ist. Ein konstanter Beitrag wirkt nur auf $F \subset F''$. \mathbf{j} wird hierbei als stationär betrachtet. Mit (1.10) und mit $\partial_t \mathbf{E} = 0$ auf $F_t \equiv F'$ gilt weiter:

$$= \int_{\partial F'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}.$$

Für die linke Seite von (1.11) gilt:

$$\frac{1}{c} \int_{F''} \partial_t \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \stackrel{(1.10)}{\Rightarrow} \int_{\partial F''} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$$

Unter anderem wurde hierbei berücksichtigt, dass $\mathbf{j} = 0$ auf F'' gilt.

Bemerkung: Maxwells Ergänzungsterm beschreibt also, dass jedes zeitabhängige \mathbf{E} -Feld im Allgemeinen mit einem \mathbf{B} -Feld verknüpft ist. \sim

1.6 Feldgleichungen in differentieller Form

Mehr zu Differentialoperatoren und deren Darstellungen findet man auch in [1, (A-3) S. 107].

1.6.1 Gradient, ∇ -Operator

Sei ein skalares Feld $\phi(\mathbf{r})$ gegeben. Die Orte an denen $\phi(\mathbf{r}) = \text{const}$, bzw. $\phi(x, y, z) = \text{const}$ gilt, definieren eine Fläche. Entlang einer Kurve C gilt es eine Parametrisierung dieser einzuführen, was mathematisch wie folgt zum Ausdruck gebracht wird:

$$\phi|_C = \phi(\mathbf{r}(s)) = \phi(x(s), y(s), z(s)).$$

Dabei ist der Tangentenvektor durch $\frac{d}{ds} \mathbf{r}(s)$ gegeben. Betrachten wir die Änderung von ϕ entlang der Kurve C , so ergibt sich diese aus:

$$\frac{d}{ds} \phi(\mathbf{r}(s)) \cdot \Delta s = \Delta \phi$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \phi(\mathbf{r}(s)) &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_C \frac{dx}{ds} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_C \frac{dy}{ds} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_C \frac{dz}{ds} \\ &= \nabla \phi(\mathbf{r}(s)) \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{r}(s) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich auch die koordinatenunabhängige *Definition des Gradienten*, gemäß:

$$d\phi = (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{r} = (\text{grad } \phi) \cdot d\mathbf{r}$$

Der dabei verwendete *Nabla-Operator* (∇) ist (für Physiker) sowohl ein Vektor als auch ein Differentialoperator. In kartesischen Koordinaten ausgeschrieben lautet er:

$$\nabla = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z$$

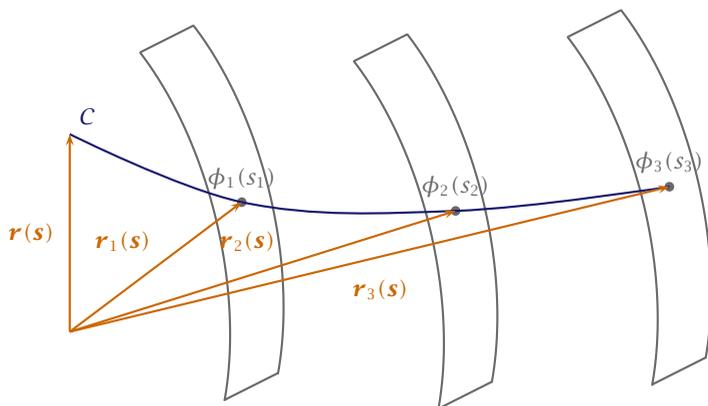
Der Gradient selbst ist eine Abbildung vom Funktionenraum in den \mathbb{R}^3 , das heißt

grad : skalares Feld \rightarrow Vektorfeld.

Ein Spezialfall ergibt sich, wenn eine Kurve \tilde{C} in der Fläche mit $\phi(\mathbf{r}) = \text{const}$ liegt. Dann gilt nämlich:

$$\frac{d\phi(\mathbf{r}(s))}{ds} = 0 = \left(\nabla \phi(\mathbf{r}(s)) \right) \cdot \underbrace{\frac{d}{ds} \mathbf{r}(s)}_{\text{Tangentenvektor an } \tilde{C}}$$

Das wiederum bedeutet, dass $\nabla \phi$ orthogonal zum Tangentenvektor an \tilde{C} ist, woraus folgt, dass $\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ die Flächennormale zur Fläche $\phi(\mathbf{r}) = \text{const}$ im Punkt \mathbf{r} ist. Mit anderen Worten heißt das: Der Gradient steht stets senkrecht auf der Niveauläche. Die geometrische Bedeutung des Gradienten liefert Abbildung 36:



► 36 Illustration des Gradienten. Der Gradient in blau steht stets senkrecht auf der grauen Niveauläche.

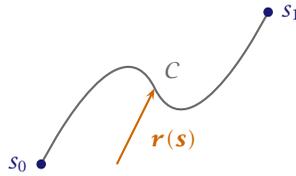
Der Gradient gibt nämlich durch seine Richtung die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $\phi(\mathbf{r})$ und durch seinen Betrag die Stärke dieses Anstieges an.

Eingedenk der koordinatenunabhängigen Definition des Gradienten lässt sich ein *wichtiger Satz* folgern:

$$\int_{C:s_0}^{s_1} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \int_{\phi(s_0)}^{\phi(s_1)} d\phi = \phi(s_1) - \phi(s_0).$$

Das bedeutet, dass das Kurvenintegral lediglich vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, nicht jedoch vom Weg der dazwischen liegt. In Zylinderkoordinaten lautet der Gradient wie folgt:

$$\nabla \phi = \left(\mathbf{e}_\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$$



► 37 Das Kurvenintegral hängt lediglich von Anfangs- und Endpunkt ab.

1.6.2 Quellstärke (Divergenz), Gaußscher Satz

Die *Divergenz* ist eine Abbildung, die einem Vektorfeld ein skalares Feld zuordnet, das heißt:

$$\text{div} : \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Dieser Sachverhalt schreibt sich in kartesischen Koordinaten

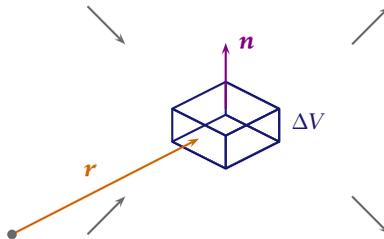
$$\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

und in Zylinderkoordinaten

$$\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho A_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} A_z.$$

Darüber hinaus gibt es, wie auch beim Gradient, eine koordinatenfreie Definition von $\text{div} \mathbf{A}$:

$$\text{div} \mathbf{A} := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta V} \int_{\partial \Delta V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} \right].$$



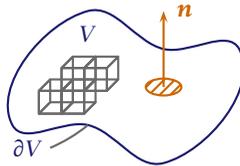
► 38 Illustration zur Divergenz.

Mit dieser Definition wird der *Gaußsche Satz* eingängiger. Dieser lautet:

Gaußscher Satz

$$\int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \text{div} \mathbf{A} dV.$$

BEWEISIDEE Da die Grundflächen der Kuben sich innerhalb des Volumens V im Oberflächenintegral gegenseitig aufheben bleiben nur noch die Flächen außen am Rand ∂V übrig. ■



► 39 Zum Beweis des Gaußschen Satzes.

Anwendungen des Gaußschen Satzes Zum Einen lassen sich das Gaußsche- und Gilbertsche-Gesetz, also die ersten beiden Feldgleichungen in ihrer integralen Form, in ihre differentielle Form überführen, denn:

$$\begin{aligned}
 4\pi \int_V \varrho \, dV &= \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV \\
 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \varrho \\
 \int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} &= 0 = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV \\
 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0.
 \end{aligned}$$

Zum Anderen lässt sich die Kontinuitätsgleichung von ihrer integralen Form auf ihre differentielle Form überführen:

$$\begin{aligned}
 \int_V \partial_t \varrho \, dV &= - \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \\
 \Rightarrow \int_V \partial_t \varrho \, dV &= - \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} \, dV \\
 \Rightarrow \partial_t \varrho + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0
 \end{aligned}$$

Damit haben wir eine interessante Aussage gewonnen. Denn die Kontinuitätsgleichung in ihrer integralen Form ist global gültig. Durch Anwenden des Gaußschen Satzes und Umwandeln in ihre differentielle Form zeigt sich auch ihre punktweise Gültigkeit. Diese Argumentation lässt sich jedoch auch umdrehen. Durch Integrieren der erhaltenen Differentialgleichung kommen wir wieder auf die integrale Form und erhalten damit aus der punktweisen Gültigkeit die globale Gültigkeit der Gleichung.

1.6.3 Wirbelstärke (Rotation), Stokesscher Satz

Die **Rotation** ist eine Abbildung von einem Vektorfeld auf ein Vektorfeld, d.h.

$$\operatorname{rot} : \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Die Rotation ist in kartesischen Koordinaten über

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \mathbf{e}_x + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \mathbf{e}_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \mathbf{e}_z$$

bzw. mit dem Levi-Civita-Symbol:

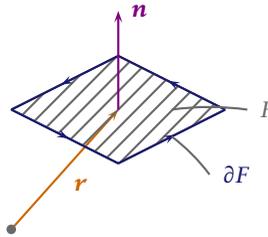
$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma$$

und in Zylinderkoordinaten über

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\varrho} \partial_\varphi A_z - \partial_z A_\varphi \right) \mathbf{e}_\varrho + (\partial_z A_\varrho - \partial_\varrho A_z) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho A_\varphi) - \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi A_\varrho \right) \mathbf{e}_z$$

definiert. Auch hier gibt es wieder eine koordinatenfreie Definition:

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) := \lim_{\Delta F} \frac{1}{\Delta F} \underbrace{\int_{\partial \Delta F} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}}_{\Gamma_C(\mathbf{A})}$$

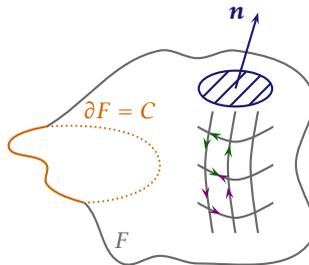


► 40 Illustration zur Rotation.

Damit wird der *Stokessche Satz* griffiger.

Stokesscher Satz

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} = \int_{\partial F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$



► 41 Zum Beweis des Stokesschen Satzes.

BEWEISIDEE Im Inneren der Fläche F heben sich paarweise immer die nebeneinander liegenden Linien des »Netzes« auf (bzw. die Linienintegrale heben sich auf). Betrachten wir dies kontinuierlich bis zum Rand ∂F so bleiben zu Letzt nur noch die Linienintegrale am Rand erhalten. ■

Sei $F = \partial V$, das heißt $\partial F = \partial \partial V = 0$, also F ist geschlossen; dann gilt:

$$\int_{F=\partial V} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{f} = 0.$$

Die Fläche F darf bei fester Raumkurve ∂F im Definitionsbereich von $\text{rot } \mathbf{A}$ beliebig deformiert werden. Wenn wir darauf den Gaußschen Satz anwenden, dann folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{F=\partial V} (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{f} = \int_V \text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) \, dV \\ &\Rightarrow \text{div rot} \equiv 0 \end{aligned}$$

Das heißt, das Wirbel quellenfrei sind.

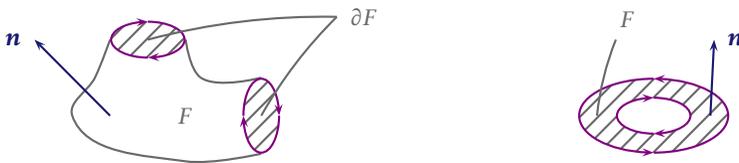
Sei weiterhin $\mathbf{A} = \nabla \phi$, dann folgt mit dem Stokesschen Satz:

$$\int_F \text{rot}(\text{grad } \phi) \cdot d\mathbf{f} = \int_{\partial F} (\text{grad } \phi) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

da ∂F eine geschlossene Kurve ist, d.h. $\partial \partial F = 0$

$$\Rightarrow \text{rot grad} = 0,$$

was wiederum bedeutet, dass Gradientenfelder wirbelfrei sind.



► 42 Die Ränder dieser Gebiete sind nicht einfach zusammenhängend.

Bemerkung: Es gilt stets zu beachten, dass sich Ränder von Flächen stets aus mehreren Stücken zusammensetzen können. Man spricht in solchen Fällen von *nicht einfach zusammenhängenden* Mannigfaltigkeiten. -o

Wichtige Lemmata (L1) In einem *einfach zusammenhängenden* Gebiet gilt:

$$\text{rot } \mathbf{A} = 0 \iff \exists \phi(\mathbf{r}) : \mathbf{A} = \text{grad } \phi$$

Dabei ist das skalare Feld $\phi(\mathbf{r})$ *eindeutig bis auf eine Konstante*. Das Vektorpotential \mathbf{A} besitzt dann eine sogenannte *Eichfreiheit*.



► 43 Links: Einfach zusammenhängendes Gebiet. Rechts: Zweifach zusammenhängendes Gebiet.

$$(L2) \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \iff \exists \mathbf{A} : \mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

Das Vektorfeld \mathbf{V} ist dabei »eindeutig« bis auf $\nabla \phi$.

✕

Als *einfach zusammenhängendes Gebiet* wird jede geschlossene Kurve im Gebiet g bezeichnet, die folgende Eigenschaft hat:

$$g : C \rightarrow \text{Punkt} \in g.$$

Das heißt die Kurve C kann stetig auf einen einzigen Punkt, der wiederum im Gebiet g liegt zusammengezogen werden. Als *zweifach zusammenhängend*, bezeichnet man ein Loch (oder auch einen Punkt), wo \mathbf{A} nicht definiert ist. Dort kann $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ in g sein, zugleich aber

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$

sein.

Anwendungen des Stokesschen Satzes Der Stokessche Satz kann, wie auch schon der Gaußsche Satz, dazu verwendet werden die Maxwellgleichungen von ihrer integralen Form auf ihre differentielle Form zu bringen.

Betrachten wir zunächst das Oerstedtsche, bzw. Ampèresche-Gesetz mit der zugehörigen Maxwellischen Ergänzung:

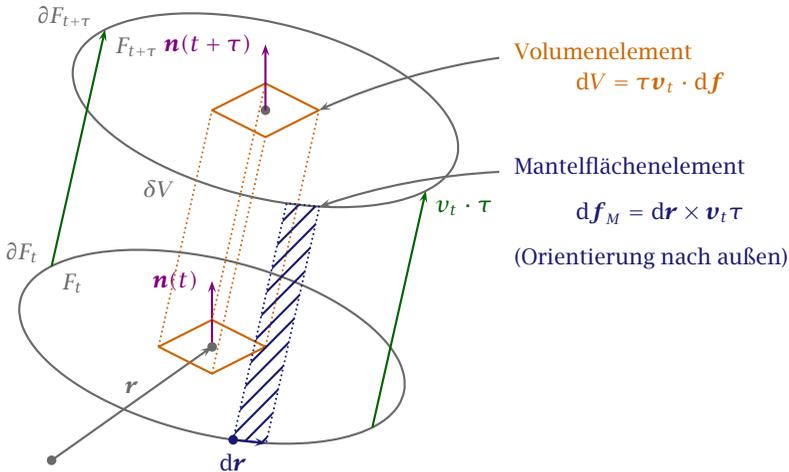
$$\begin{aligned} \int_F \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \right) \cdot d\mathbf{f} &= \int_{\partial F} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \\ \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \end{aligned}$$

Darüber hinaus können wir das Induktionsgesetz umformen. Dazu betrachten wir zunächst eine ruhende, feste Schleife $C = \partial F$, das heißt $\mathbf{v} = 0$ im Induktionsgesetz.

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} &= -\frac{1}{c} \int_F \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \int_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \\ \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
 I_t &:= \frac{d}{dt} \int_{F_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} \\
 I_t &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\int_{F_{t+\tau}} \mathbf{A}(t + \tau) \cdot d\mathbf{f} - \int_{F_t} \mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{f} \right] \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\int_{F_{t+\tau}} \mathbf{A}(t + \tau) \cdot d\mathbf{f} - \int_{F_t} \mathbf{A}(t + \tau) \cdot d\mathbf{f} + \int_{F_t} \underbrace{(\mathbf{A}(t + \tau) - \mathbf{A}(t)) \cdot d\mathbf{f}}_{\tau \partial_t \mathbf{A}(t) + o(\tau^2)} \right] \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\int_{F_{t+\tau}} [\mathbf{A}(t) + \tau \partial_t \mathbf{A}(t)] \cdot d\mathbf{f} - \int_{F_t} [\mathbf{A}(t) + \tau \partial_t \mathbf{A}(t)] \cdot d\mathbf{f} + o(\tau^2) \right] \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\int_{F_{t+\tau}} \mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{f} - \int_{F_t} \mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{f} + \tau \underbrace{\left(\int_{F_{t+\tau}} \partial_t \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} - \int_{F_t} \partial_t \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} \right)}_{\substack{o(\tau) \\ o(\tau^2)}} \right] \\
 I_t &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\int_{F_{t+\tau}} \mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{f} - \int_{F_t} \mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{f} \right] + \int_{F_t} \partial_t \mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{f} \quad \rightarrow
 \end{aligned}$$



► 44 Zur Herleitung der differentiellen Maxwell-Gleichungen.

Dabei sind folgende Relationen zu beachten

$$\begin{aligned}
 dV &= \tau \cdot \mathbf{v}_t \cdot d\mathbf{f} \\
 \mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{f}_M &= \mathbf{A}(t) \cdot (d\mathbf{r} \times \mathbf{v}_t) \tau \\
 &= \tau (\mathbf{v}_t \times \mathbf{A}(t)) \cdot d\mathbf{r}
 \end{aligned}$$

Betrachtet man nun das Volumen δV und wendet den Satz von Gauß an, so ergibt sich

$$\int_{\delta V} \operatorname{div} \mathbf{A}(t) dV = \int_{\partial \delta V} \mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{f}$$

Dabei bezieht sich das Oberflächenintegral auf die beiden Deckel, sowie der Mantelfläche M des Volumens.

$$\int_{\partial\delta V} \mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{f} = \int_{F_{t+\tau}} \underbrace{\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{n}(t + \tau) df}_{df \text{ von } F_{t+\tau}} - \int_{F_t} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{n}(t) df + \int_M \mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{f}_M \quad (1.12)$$

Der negative Term ist dabei der Orientierung von \mathbf{n} geschuldet, da dieser Normalen-Vektor laut dem Satz von Gauß aus der Fläche hinaus zeigen muss. Man kann sich leicht überlegen, dass

$$\int_{\partial\delta V} \mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{f} = \int_{F_t} (\operatorname{div} \mathbf{A}) \tau \cdot \mathbf{v}_t df$$

damit lässt sich (1.12) umformen zu

$$\int_{F_{t+\tau}} \underbrace{\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{n}(t + \tau) df}_{df \text{ von } F_{t+\tau}} - \int_{F_t} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{n}(t) df = \int_{F_t} (\operatorname{div} \mathbf{A}) \tau \cdot \mathbf{v}_t df - \underbrace{\int_M \mathbf{A}(t) \cdot d\mathbf{f}_M}_{=\tau \int_{\partial F_t} (\mathbf{v}_t \times \mathbf{A}(t)) \cdot d\mathbf{r}}$$

Für unseren Integranden ergibt dies

$$I_t = \int_{F_t} [\partial_t \mathbf{A}(t) + \operatorname{div} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{v}_t] \cdot d\mathbf{f} - \int_{\partial F_t} (\mathbf{v}_t \times \mathbf{A}(t)) \cdot d\mathbf{r}$$

Satz von Stokes angewandt auf den letzten Term ergibt

$$\frac{d}{dt} \int_{F_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} = \int_{F_t} [\partial_t \mathbf{A}(t) + \operatorname{div} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{v}_t - \operatorname{rot}(\mathbf{v}_t \times \mathbf{A}(t))] \cdot d\mathbf{f}$$

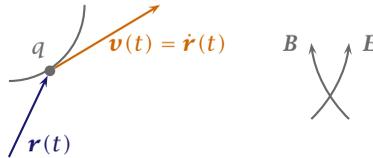
Bemerkung:

$$\begin{aligned} [(\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{A})]_\alpha &= v_\alpha \partial_\beta A_\beta - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta [\varepsilon_{\gamma\mu\nu} v_\mu A_\nu] \\ &= v_\alpha \partial_\beta A_\beta - \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\mu\nu}}_{\delta_{\alpha,\mu} \delta_{\beta,\nu} - \delta_{\alpha,\nu} \delta_{\beta,\mu}} \partial_\beta (v_\mu A_\nu) \\ &= v_\alpha \partial_\beta A_\beta - \partial_\beta (v_\alpha A_\beta) + \partial_\beta (v_\beta A_\alpha) \\ &= v_\alpha \partial_\beta A_\beta - v_\alpha (\partial_\beta A_\beta) - (\partial_\beta v_\alpha) + (\partial_\beta v_\beta) A_\alpha + v_\beta (\partial_\beta A_\alpha) \\ &= [- (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}]_\alpha \end{aligned}$$

Für den Integranden bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_t \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{A}) &= (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t) + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} \end{aligned}$$

Mittels des ε -Tensors konnte der Integrand auf eine handlichere Form gebracht werden. →



► 45 Gleichförmige Bewegung einer Ladung auf der Trajektorie $\mathbf{r}(t)$.

Diese Gleichung ist erfüllt, falls

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \varrho + \mathbf{h}(\mathbf{r})$$

Was stark an das Coloumb Gesetz erinnert, jedoch muss nun noch der Term $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ weg diskutiert werden. Dies ist aber nicht sehr schwer, wenn wir bedenken dass (1.13) für alle Zeiten t gelten muss, so wird $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = 0$ festgelegt, wenn das Coloumbgesetz für ein bestimmtes $t = t_0$ erfüllt ist, d.h. wiederum auch, dass das Coloumbgesetz für alle Zeiten t gilt. Analoges Vorgehen liefert die Kontinuität der Faraday Gleichung.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} & | \operatorname{div} \\ \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E}}_{=0} &= -\frac{1}{c} \operatorname{div} \mathbf{B} \\ \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} &= \mathbf{h}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Auch hier gilt: Ist die Gleichung für ein bestimmtes $t = t_0$ erfüllt, so wird $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ zu 0 und damit ist gezeigt, dass diese Maxwell'sche Gleichung (Gilbert) für alle Zeiten t gilt.

Nun widmen wir uns dem Thema der magnetischen Quellen, diese gelten bisher als nicht existent, wären jedoch magnetische Monopole vorhanden, so müsste man die Maxwell Gleichungen wie folgt anpassen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 4\pi \varrho_m \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen würden zudem zur Folge haben, dass

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_m + \partial_t \varrho_m = 0$$

1.7 Energie- und Impulsbildung im elektromagnetischen Feld

Geladene Teilchen können Energie und Impuls mit elektromagnetischen Feld *austauschen*:

$\mathbf{k} = \frac{d}{dt} \mathbf{P}$	Impulszunahme des Teilchens
$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} W$	Energiezunahme

mit:

$$W = E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$$

Die Impuls und Energiezunahme sind Folgen der *Feldenergie* und des *Feldimpulses*.

1.7.1 Energiebilanz

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} &= q \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] \cdot \mathbf{v} = q \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_V \partial_t W_{\text{mech}} \, dV \\ \Rightarrow \partial_t W_{\text{mech}}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\text{Energietransfer}}{\text{Zeit und Volumen}} \end{aligned}$$

Im folgenden werden wir nun die Stromdichte durch die Maxwell Gleichungen ausdrücken

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \partial_t \mathbf{E} \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{E} \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) &= \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \partial_\beta \varepsilon_{\beta\gamma\delta} E_\gamma B_\delta \\ &= \varepsilon_{\beta\gamma\delta} (\partial_\beta E_\gamma) B_\delta + \varepsilon_{\beta\gamma\delta} E_\gamma (\partial_\beta B_\delta) \\ &= B_\delta \varepsilon_{\beta\gamma\delta} \partial_\beta E_\gamma + E_\gamma \underbrace{\varepsilon_{\beta\gamma\delta}}_{-\varepsilon_{\gamma\beta\delta}} \partial_\beta B_\delta \\ &= \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{B} \\ \Rightarrow \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

-

Damit wird

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} &= \frac{c}{4\pi} \left[\mathbf{B} \cdot \underbrace{\text{rot } \mathbf{E}}_{-\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right] - \frac{1}{8\pi} \partial_t E^2 \\ &= -\text{div} \left(\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) - \partial_t \left[\frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \right] = \partial_t W_{\text{mech}} \end{aligned}$$

Dabei wird die *elektromagnetische Feldenergie* beschrieben durch den Term

$$u_{\text{Feld}} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2)$$

Der *Poyntingvektor* lautet

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

und wird auch als *Energiestromdichte* bezeichnet.

Der *Energiesatz der Feld-Teilchen Systeme* wird damit definiert durch

$$-\partial_t u_{\text{Feld}} = \partial_t W_{\text{mech}} + \text{div } \mathbf{S}$$

Wiederholung: Die Maxwellgleichungen in differentieller Form lauten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \varrho & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \end{aligned}$$

Der Energieerhaltungssatz der Elektrodynamik in differentialer Form lautet:

$$-\partial_t u_{\text{Feld}} = \partial_t W_{\text{mech}} + \operatorname{div} \mathbf{S}$$

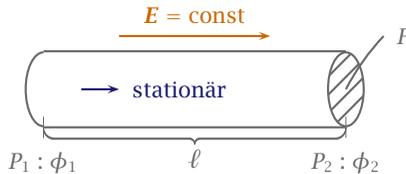
in integraler Form lautet er:

$$-\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V u_{\text{Feld}} dV}_{I_1} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V W_{\text{mech}} dV}_{I_2} + \underbrace{\int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}}_{I_3}$$

Hierbei entspricht Integral I_1 der Abnahme der Feldenergie im Volumen V pro Zeit, Integral I_2 der Zunahme der mechanischen Energie im Volumen V pro Zeit und Integral I_3 der ausströmenden Feldenergie pro Zeit. ~

Exkurs: realer Leiter, Ohmsches Gesetz

Im folgenden betrachten wir einen Leiter der Länge ℓ durch den ein stationärer Strom I fließt:



► 46 Ein realer Leiter mit der Querschnittsfläche F , durch den ein stationärer Strom fließt.

Im Leiter gilt:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho &= 0 \implies \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 && \text{d.h. stationär} \\ \partial_t \mathbf{B} &= 0 \implies \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \\ \implies \mathbf{E} &= -\nabla \phi \end{aligned}$$

Hierbei ist das Minuszeichen vor dem Gradient Konvention und ϕ bezeichnet das Potential. An den beiden Enden des Leiters liegt ein unterschiedliches Potential vor, die Potentialdifferenz bezeichnet man allgemein hin als Spannung U . Es gilt also:

$$\underbrace{\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}}_{=E \cdot \ell} = - \int_{P_1}^{P_2} (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{r} = \underbrace{\phi_1 - \phi_2}_{=U}$$

Experimente zeigen schließlich, das folgendes für die Stromdichte \mathbf{j} gilt:

$$\boxed{\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}} \quad (j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta)$$

σ wird auch als Leitfähigkeit bezeichnet und ist allgemein hin ein Tensor. Damit gilt weiter:

$$\begin{aligned} \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} &= I = \sigma \int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \\ &= \sigma \cdot E \cdot D = \frac{\sigma F}{\ell} (\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

Damit folgt das *Ohmsche Gesetz*:

$$\boxed{\phi_1 - \phi_2 \equiv U = IR_{12} \quad , \quad R_{12} = \frac{\ell}{\sigma F}}$$

Bemerkung: $\sigma < \infty$ aufgrund der Stöße der Elektronen mit thermischen Metallgitterschwingungen (Phononen) und Gitterdefekte. →

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &= \sigma E^2 && (= \sigma_{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta) \\ &= \partial_t W_{\text{mech}} = \frac{\ell}{R \cdot F} \left(\frac{U}{\ell} \right)^2 \\ &= \frac{U^2}{R} \frac{\ell}{(F \cdot \ell)} = \dot{V} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$\boxed{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2}$$

Dies bezeichnet auch die pro Zeit und Volumen erzeugte jousche Wärme (dissipative mechanische Energie)

$$w = \partial W_{\text{mech}} \cdot V \cdot \Delta t = U \cdot I \cdot \Delta t.$$

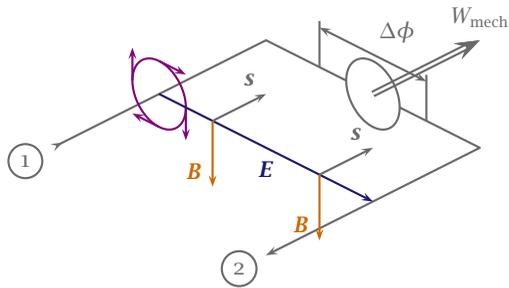
Frage: Wie kommt im Feldbild die elektrische Energie zum Verbraucher? →

Der Einfachheit halber als Supraleiter angenommen:

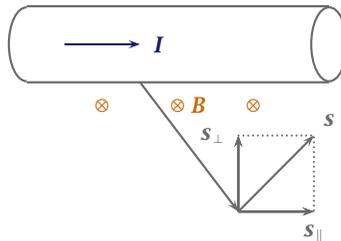
- ▶ kein Spannungsabfall längs des Leiters
- ▶ Leiter (1) auf Potential (1) und Leiter (2) auf Potential (2)
- ▶ \mathbf{E} verläuft senkrecht von (1) nach (2)

Realer Leiter: \mathbf{E} hat auch eine Komponente in Richtung von I , um den Strom aufrecht zu erhalten.

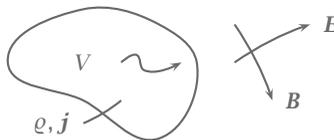
\mathbf{s}_\perp zeigt zu Leiter hin, d.h. die jousche Wärme erfolgt durch Zufluss aus der Feldenergie



► 47 Der Einfachheit halber wird der Aufbau als Supraleiter angenommen, d.h. es findet kein Spannungsabfall entlang des Leiters statt.



► 48 s_{\perp} zeigt zum Leiter und s_{\parallel} zeigt zum Verbraucher.



► 49 Innerhalb des Volumen V befinden sich Ladungen mit der Ladungsdichte q und der Stromdichte j . Auf diese wirken die externen Felder E und B ein.

1.7.2 Impulsbilanz

Wir betrachten das Volumen V aus Abbildung 49.

Die Gesamtkraft auf ϱ, \mathbf{j} in V :

$$\int_V \mathbf{K} dV = \frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{mech}}$$

Somit gilt für \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \varrho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

mit $\varrho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E}$ und $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \partial_t \mathbf{E}$ gilt:

$$= \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c} (\partial_t \mathbf{E}) \times \mathbf{B}$$

mit $(\partial_t \mathbf{E}) \times \mathbf{B} = \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \partial_t \mathbf{B}$ und $\partial \mathbf{B} = -c \nabla \times \mathbf{E}$ folgt:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi c} \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi c} \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} E_\alpha (\nabla \cdot \mathbf{E}) - [\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_\alpha &= E_\alpha \partial_\beta E_\beta - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} E_\beta \varepsilon_{\gamma\mu\nu} \partial_\mu E_\nu \\ &= E_\alpha \partial_\beta E_\beta - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\mu\nu} E_\beta \partial_\mu E_\nu \\ &= E_\alpha \partial_\beta E_\beta - [\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}] E_\beta \partial_\mu E_\nu \\ &= E_\alpha \partial_\beta E_\beta - E_\beta \partial_\alpha E_\beta + E_\beta \partial_\beta E_\alpha \\ &= \partial_\beta (E_\alpha E_\beta) - \frac{1}{2} \partial_\alpha (E_\beta E_\beta) \\ &= \partial_\beta \left[E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \mathbf{E}^2 \right] \end{aligned}$$

Somit lässt sich die *Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes* definieren:

$$\mathbf{p}_{\text{Feld}} := \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$$

Der *Maxwellsche Spannungstensor* ist hierbei wie folgt definiert:

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} := \frac{1}{4\pi} (E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta) - \delta_{\alpha\beta} \mathbf{u}_{\text{Feld}} = \mathcal{T}_{\beta\alpha}$$

Es zeigt sich, dass der Tensor symmetrisch ist. Somit folgt:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_{\text{mech}})_\alpha = \int_V \partial_\beta \mathcal{T}_{\alpha\beta} dV - \frac{d}{dt} \int_V p_\alpha^{\text{Feld}} dV$$

mit $\mathbf{p}_{\text{Feld}} = \int_V \mathbf{p}_{\text{Feld}} dV$ folgt:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(p_\alpha^{\text{mech}} + p_\alpha^{\text{Feld}})}_{p_\alpha^{\text{tot}}} = \int_V \partial_\beta \mathcal{T}_{\alpha\beta} dV \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} \mathcal{T}_{\alpha\beta} n_\beta df$$

Der Term:

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = (\mathcal{T}\mathbf{n})_\alpha$$

entspricht der Kraft pro Fläche in α -Richtung auf ein Oberflächenelement mit Normalen \mathbf{n} .

Die Drehimpulsdichte $\boldsymbol{\ell}_{\text{Feld}}$ des elektromagnetischen Feldes ist wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{\ell}_{\text{Feld}} := \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{\text{Feld}}.$$

2

Statische Felder und elektromagnetische Wellen

2.1 Elektro- und Magnetostatik

Im Falle statischer Felder gilt:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho &= 0 : & \varrho &= \varrho(\mathbf{r}) \\ \partial_t \mathbf{j} &= 0 : & \mathbf{j} &= \mathbf{j}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Das heißt wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit *vorgegebenen* Verteilungen, was wiederum bedeutet, dass wir Rückwirkungen auf Ladungen und Ströme vernachlässigen werden.

Wir fordern, dass $\varrho(\mathbf{r})$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ ist außerhalb hinreichend großer Kugeln vom Radius R . Da wir statische Felder betrachten wollen, suchen wir auch die statischen Lösungen der Maxwellgleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{E} &= 0 : & \mathbf{E} &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \partial_t \mathbf{B} &= 0 : & \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Die Maxwellgleichungen für den Fall statischer Wellen lauten wie folgt:

Elektrostatik	Magnetostatik
$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \varrho$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$	$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$

Es fällt auf, dass die Maxwellgleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{B} nun nicht mehr gekoppelt sind. Die Kopplung zwischen den jeweiligen Feldern tritt also erst durch die Zeitabhängigkeit in Kraft. Es folgt außerdem, dass $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Dies ist allerdings mit der Kontinuitätsgleichung vereinbar, da $\partial_t \varrho = 0$ ist.

Aufgabe (für \mathbb{R}^3): Gesucht sind Vektorfelder \mathbf{E}/\mathbf{B} , deren Quellen/Wirbel gegeben sind und deren Wirbel/Quellen verschwinden.

Hierfür fordern wir als Randbedingungen, dass die Felder für $r \rightarrow \infty$ mindestens wie r^{-2} verschwinden sollen. Diese Forderung gewährleistet, dass die dazugehörigen Potentiale wie r^{-1} abfallen, da ja die Felder, Gradientenfelder eines Potentials sind. Würden wir hingegen fordern, dass das Feld nur mit r^{-1} verschwinden würde, so würde das zugehörige Potential wie $\log(r)$ laufen, was im Unendlichen nicht verschwindet. →

Fundamentalsatz der Vektoranalysis *Im \mathbb{R}^3 gilt:*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \rightleftharpoons \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}) =: Q(\mathbf{r}) & \text{Quellen} \\ \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) =: \mathbf{W}(\mathbf{r}) \text{ mit } \operatorname{div} \mathbf{W} = 0 & \text{Wirbel} \end{cases}$$

Ein Vektorfeld sei durch seine Quellen $Q(\mathbf{r})$ und seine Wirbel $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ eindeutig bestimmt, wenn

- ▶ $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$ für $r \rightarrow \infty$
- ▶ $Q(\mathbf{r}), \mathbf{W}(\mathbf{r})$ im **ganzen** \mathbb{R}^3 bekannt sind und im Unendlichen hinreichend schnell abfallen (z.B. außerhalb einer Kugel mit Radius $R < \infty$)

BEWEIS Hier soll nur die Eindeutigkeit bewiesen werden, die Existenz folgt später durch Konstruktion. Wir nehmen an:

$\exists \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ mit gleichen Quellen und Wirbeln; $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 =: \mathbf{U} \neq 0$, $\mathbf{U} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$ für $r \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}_i &= Q & , i = 1, 2 \\ \operatorname{rot} \mathbf{F}_i &= \mathbf{W} & , \operatorname{div} \mathbf{W} = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$ und $\operatorname{rot} \mathbf{U} = 0$ ist. \mathbf{U} ist also wirbelfrei und lässt sich somit als ein Gradientenfeld schreiben $\mathbf{U} = \nabla \psi$. Dabei ist $\psi(r \rightarrow \infty) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$. Daraus wiederum folgt direkt:

$$\nabla^2 \psi = 0,$$

also die **Laplace-Gleichung**. Die Lösungen davon sind die harmonischen Funktionen.

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \psi)^2 dV &= \int_V \left[\nabla \cdot (\psi \nabla \psi) - \underbrace{\psi \nabla^2 \psi}_{=0} \right] dV \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \underbrace{\int_{\partial V} \underbrace{\psi \mathbf{n} \cdot \nabla \psi}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)} \underbrace{df}_{\propto r^2}}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

dabei ist R der Radius des Volumens V

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \psi)^2 dV &= \int_{\mathbb{R}^3} U^2 dV = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{U} &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme, dass $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \mathbf{U} \neq 0$. Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen. ■

Zusätzliches Resultat: Die harmonischen Funktionen $\psi(\mathbf{r})$ mit $\nabla^2 \psi = 0$ (im ganzen \mathbb{R}^3) und $\psi(r \rightarrow \infty) = \mathcal{O}(1/r)$ sind: $\psi \equiv 0$ -o

2.1.1 Elektrostatik im \mathbb{R}^3

Wie oben bereits beschrieben gilt im Falle der Elektrostatik:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \varrho.\end{aligned}$$

Das elektrische Feld \mathbf{E} ist hier also wirbelfrei, weswegen ein Potential ϕ existiert und \mathbf{E} sich als Gradientenfeld $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ schreiben lässt. Damit folgt insbesondere auch:

$$\begin{aligned}-\nabla \cdot \nabla \phi &= -\nabla^2 \phi = 4\pi \varrho \\ \Rightarrow \nabla^2 \phi &= -4\pi \varrho,\end{aligned}$$

mit $\phi(r \rightarrow \infty) = 1/r$ — die sogenannte *Poisson-Gleichung*. Im folgenden werden wir die Lösungen der Poissonschen Gleichung für das Potential ϕ suchen. Dabei setzt sich die allgemeine Lösung als Superposition der Lösung der homogenen Gleichung und der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Die homogene Gleichung entspricht aber dabei gerade wieder der Laplace-Gleichung, die oben schon gelöst wurde. Es gilt also:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi_h &= 0 \\ \phi_h(r \rightarrow \infty) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \\ \Rightarrow \phi_h &= 0\end{aligned}$$

Wir werden nun zwei verschiedene Wege kennenlernen, um das inhomogene Problem zu lösen.

1. Weg: Hierbei wollen wir das Coulombgesetz, sowie das Superpositionsprinzip ausnutzen. Damit gilt im kontinuierlichen Fall:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \varrho(\mathbf{r}') \, dV' \\ &= -\nabla_{\mathbf{r}} \int_V \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \\ &= -\nabla \phi\end{aligned}$$

weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= -4\pi \varrho \\ \Rightarrow \nabla^2 \phi &= -4\pi \varrho\end{aligned}$$

Damit haben wir die Grundaufgabe der Elektrostatik (im \mathbb{R}^3) gelöst und

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV'}$$

als Potential erhalten.

2. Weg: Dieser Weg führt uns über die *Greensche Funktion*. Diese wird als Potential $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ für eine Einheitspunktladung $\varrho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ mit der Randbedingung $\mathcal{O}(\frac{1}{r})$ angenommen. Es gilt also:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Dabei wirkt der Laplace- Operator nur auf \mathbf{r} . Es sei auch angemerkt, dass die Greensche Funktion im Allgemeinen nicht von obiger Form ist. Lediglich bei translationsinvarianten Problemen wird diese Form angenommen. Nutzen wir nun wieder das Superpositionsprinzip aus, so ergibt sich für eine beliebige Ladungsverteilung:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') dV' \\ \Rightarrow \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \varrho(\mathbf{r}') dV' = -4\pi\varrho(\mathbf{r})\end{aligned}$$

Wir bestimmen $G(\mathbf{r})$ mittels *Fouriertransformation*:

$$\begin{aligned}\nabla^2 G(\mathbf{r}) &= -4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad G(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hat{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \nabla^2 G(\mathbf{r}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (i\mathbf{k})^2 \hat{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \delta(\mathbf{r}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \Rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (i\mathbf{k})^2 \hat{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &= -4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \Rightarrow k^2 \hat{G}(\mathbf{k}) &= 4\pi, \quad \text{d.h. } \hat{G}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k^2} \\ \Rightarrow G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \hat{G}(k^2) \int d\Omega_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}I(\mathbf{r}) &:= \int d\Omega_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad D: \text{Drehmatrix (Drehung)} \\ \Rightarrow I(D\mathbf{r}) &= \int d\Omega_k e^{i\mathbf{k}\cdot D\mathbf{r}} = \int d\Omega_k e^{i(D^{-1}\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} = \int d\Omega_{D^{-1}\mathbf{k}} e^{i(D^{-1}\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} = \int d\Omega_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = I(\mathbf{r})\end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass das Skalarprodukt invariant unter Drehungen ist, sodass letztendlich gezeigt wurde, dass das gesamte Integral invariant unter Drehungen ist. \rightarrow

Damit kann der Vektor \mathbf{r} beliebig gedreht werden:

$$I(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r} = |\mathbf{r}|) = I\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}\right)$$

Wenn \mathbf{r} also in z -Richtung zeigt, folgt für das Integral $I(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{r}) &= I(r) = \int_0^\pi d\vartheta_k \sin \vartheta_k \int_0^{2\pi} d\varphi_k e^{ikr \cos \vartheta_k} \\
 &\stackrel{x=\cos \vartheta_k}{=} 2\pi \int_{-1}^1 dx e^{ikrx} = 4\pi \frac{\sin(kr)}{kr} \\
 \Rightarrow G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{8\pi^3} 4\pi \int_0^\infty dk 4\pi \frac{\sin(kr)}{kr} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{r} \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x}}_{=\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir also insgesamt gefunden:

$$\boxed{G(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|}}$$

Für unsere Konstruktion mit $\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ gilt:

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}$$

2.1.2 Magnetostatik im \mathbb{R}^3

$\text{div } \mathbf{B} = 0$ wird durch den Ansatz $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ gewährleistet.

Bemerkung: Das **Vektorpotential** \mathbf{A} ist nicht eindeutig. Bilden wir die sogenannte **Eichtransformation**, d.h. $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$, so gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \xi \\
 \Rightarrow \underbrace{\text{rot } \mathbf{A}'}_{=\mathbf{B}'} &= \underbrace{\text{rot } \mathbf{A}}_{=\mathbf{B}} + \underbrace{\text{rot}(\nabla \xi)}_{=0}
 \end{aligned}$$

Dabei wird die »Eichung« so gewählt, dass

$$\boxed{\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad \text{Coulombeichung}}$$

Dies ist stets möglich, denn wenn $\text{div } \mathbf{A} = 4\pi\lambda \neq 0$; dann bilde man $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \xi$ so, dass $0 = \text{div } \mathbf{A}' = \text{div } \mathbf{A} + \nabla^2 \xi = 4\pi\lambda + \nabla^2 \xi$.

Falls $\text{div } \mathbf{A} = 4\pi\lambda \neq 0$, dann lässt sich stets eine Eichtransformation auf $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \xi$, mit ξ als Lösung der Poissongleichung $\nabla^2 \xi = -4\pi\lambda$, finden, so dass $\text{div } \mathbf{A}' = 0$.

Damit lässt sich die zweite Maxwellgleichung schreiben als

$$\begin{aligned}
 \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} &= \text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\
 &= \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{=0 \triangleq \text{Coulombeichung}} - \nabla^2 \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta\varepsilon_{\gamma\mu\nu}\partial_\mu A_\nu &= (\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})\partial_\beta\partial_\mu A_\nu \\
 &= \partial_\beta\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta\partial_\beta A_\alpha \\
 &= (\nabla(\operatorname{div}\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A})_\alpha \\
 \Rightarrow \nabla^2\mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c}|\operatorname{div} \\
 \Rightarrow \nabla^2\operatorname{div}\mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{j} = 0,
 \end{aligned}$$

wegen Magnetostatik. Damit folgt, dass $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, falls $\operatorname{div}\mathbf{A} = \mathcal{O}(1/r)$, womit die Coulombgleichung erfüllt wäre.

In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\nabla^2 A_\alpha = -\frac{4\pi}{c}j_\alpha, \quad \alpha = x, y, z \quad (\triangleq \text{drei Poissongleichungen})$$

Wir erhalten damit folgenden Ausdruck für das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}$$

Dies fällt wie $1/r$ ab. Für das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ folgt damit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
 &= -\frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}
 \end{aligned}$$

Denn:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta[j_\gamma f] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}j_\alpha\partial_\beta f = -\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}j_\gamma\partial_\beta f = -(\mathbf{j} \times \nabla f)_\alpha$$

Damit folgt das *verallgemeinerte Biot-Savart Gesetz*:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Check:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}\mathbf{B} &= -\frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dV' \nabla \cdot \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\
 &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} dV' \underbrace{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \operatorname{rot} \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)}_{=0} = 0
 \end{aligned}$$

Denn:

$$\operatorname{div}(\mathbf{j} \times \mathbf{g}) = \partial_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\beta g_\gamma = -j_\beta \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \partial_\alpha g_\gamma = -\mathbf{j} \operatorname{rot} \mathbf{g}$$

->

Einschub zum Fundamentalsatz der Vektoranalysis:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} &= 4\pi Q \\ \operatorname{rot} \mathbf{U} &= 4\pi \mathbf{W} \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass wenn die Quellen Q und die Wirbel \mathbf{W} von \mathbf{U} im Endlichen liegen und $U(r \rightarrow \infty) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$ dann legen Q und \mathbf{W} das Vektorfeld \mathbf{U} eindeutig fest.

Nun soll \mathbf{U} explizit aus Q und \mathbf{W} konstruiert werden. Es wird also die Existenz gezeigt, was zuvor ausgelassen wurde. Betrachte dazu zunächst:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} U_\ell &= 4\pi Q & \operatorname{div} U_t &= 0 \\ \operatorname{rot} U_\ell &= 0 & \operatorname{rot} U_t &= 4\pi \mathbf{W} \end{aligned}$$

wobei der Index ℓ für die longitudinale und der Index t für die transversale Komponente steht. Damit:

$$\begin{aligned} U_\ell &= -\nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ U_t &= \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{W}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \\ \mathbf{U} &:= U_\ell + U_t \implies \operatorname{div} \mathbf{U} = 4\pi Q \\ &\quad \text{und } \operatorname{rot} \mathbf{U} = 4\pi \mathbf{W} \\ &\quad \text{und } U(r \rightarrow \infty) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned}$$

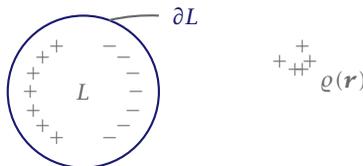
Fazit: Bei vorgegebener Ladungs- und Stromkonfiguration im \mathbb{R}^3 sind Elektro- und Magnetostatik auf *Quadraturen* (Berechnung von Integralen \rightarrow Computer) zurückgeführt. \rightarrow

Nun stellt sich die Frage, ob damit aus Sicht der Physik alles bekannt ist. Die Antwort lautet *Nein*, denn

- 1.) Das Studium spezieller Verteilungen von ϱ und \mathbf{j} muss eine anschauliche Vorstellung über die elektromagnetischen Felder vermitteln.
- 2.) In den wenigsten Fällen der praktischen Anwendung sind $\varrho(\mathbf{r})$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ im ganzen \mathbb{R}^3 bekannt.

Dies führt uns auf die elektro- und magnetostatischen *Randwertprobleme*.

► *Beispiel* Betrachte einen Leiter L , wie in Abbildung 50 dargestellt.



► 50 Links ein Leiter L mit positiven und negativen Ladungen und rechts eine zufällige Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{r})$.

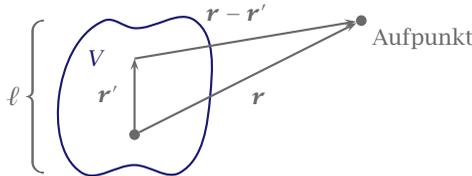
Auf ∂L ist die Ladungsverteilung zunächst nicht bekannt, sondern lediglich dass $\phi|_{\partial L} = \text{const}$.

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \phi(\mathbf{r}, [\varrho(\mathbf{r})])$$



2.2 Multipolentwicklung (Statik)

Zum besseren Verständnis ziehen wir die in Abbildung 51 eingezeichneten Größen hinzu.



► 51 Innerhalb des Volumens sind $\varrho, j \neq 0$, also lokalisiert.

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass

$$r \gg l \Rightarrow r \gg r'$$

Wir wählen \mathbf{r} in kartesischen Koordinaten, sodass

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) \\ |\mathbf{r}| = r &= (x_\alpha x_\alpha)^{1/2} \\ \hat{\mathbf{r}} &= \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \hat{\mathbf{r}}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Sei $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ eine beliebige Funktion. Wir führen deren Taylorentwicklung in \mathbf{r}' um $\mathbf{r}'_0 = 0$ bis zur zweiten Ordnung aus.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= f(\mathbf{r}) - x'_\alpha \partial_\alpha f(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta \partial_\alpha \partial_\beta f(\mathbf{r}) \\ &= f(\mathbf{r}) - \mathbf{r}' \cdot \partial_r f(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \cdot \partial_r)^2 f(\mathbf{r}) \\ &= f(\mathbf{r}) - \mathbf{r}' \cdot \nabla f(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Einen wichtigen Fall dieser Taylorentwicklung stellt die folgende Funktion dar

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - x'_\alpha \partial_\alpha \frac{1}{r} + \frac{1}{2} x'_\alpha x'_\beta \partial_\alpha \partial_\beta \frac{1}{r} + \dots$$

Dazu zwei kleine Nebenrechnungen

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \quad \partial_\alpha \frac{1}{r} &= \partial_\alpha (x_\beta x_\beta)^{-1/2} \\
 &= -\frac{1}{2} (x_\beta x_\beta)^{-3/2} (x_\beta \partial_\alpha x_\beta + (\partial_\alpha x_\beta) x_\beta) \\
 &= -\frac{1}{2} (x_\beta x_\beta)^{-3/2} (x_\beta \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} x_\beta) \\
 &= -\frac{1}{r^2} \frac{x_\alpha}{r} \\
 \Rightarrow \nabla \frac{1}{r} &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \\
 \blacktriangleright \quad \partial_\alpha \partial_\beta \frac{1}{r} &= -\partial_\alpha [x_\beta (x_\gamma x_\gamma)^{-3/2}] \\
 &= -\left\{ \delta_{\alpha\beta} r^{-3} + x_\beta \left(-\frac{3}{2}\right) (x_\delta x_\delta)^{-5/2} \cdot 2x_\alpha \right\} \\
 &= -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} + 3 \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} \\
 &= \frac{1}{r^5} [3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}]
 \end{aligned}$$

Damit folgt dann

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2] + \dots$$

Damit ergibt sich die *Multipolentwicklung*:

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{r} \int \varrho(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{r^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} \int [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2] \varrho(\mathbf{r}') dV' \\
 &= \underbrace{\phi_1}_{\text{Monopol}} + \underbrace{\phi_2}_{\text{Dipol}} + \underbrace{\phi_3}_{\text{Quadrupol}}
 \end{aligned}$$

Analog¹ erhält man die Multipolentwicklung für das magnetische Feld:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{cr^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{2cr^5} \int [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2] \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \\
 &= \underbrace{\mathbf{A}_1}_{\text{Monopol}} + \underbrace{\mathbf{A}_2}_{\text{Dipol}} + \underbrace{\mathbf{A}_3}_{\text{Quadrupol}}
 \end{aligned}$$

2.2.1 Skalares Potential ϕ : Elektrostatik

$$1.) \quad \boxed{\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{q_{\text{tot}}}{r}, \quad q_{\text{tot}} = \int_V \varrho(\mathbf{r}') dV'}$$

Ersatzladungsverteilung:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \phi_1 &= -4\pi \varrho_1 = q_{\text{tot}} \nabla^2 \frac{1}{r} \\
 &= q_{\text{tot}} (-4\pi \delta(\mathbf{r})) \\
 \Rightarrow \varrho_1(\mathbf{r}) &= q_{\text{tot}} \delta(\mathbf{r})
 \end{aligned}$$

¹siehe Übungsaufgaben: Blatt 6, Aufgabe 2. (a)

Monopol: Gesamtladung im Ursprung.

$$2.) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{p} &:= \int_V \varrho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV' \\ \phi_2(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -(\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{1}{r} \end{aligned}}$$

Dies sind elektrisches Dipolmoment und Dipolpotential. Beachte: \mathbf{p} hängt im Allgemeinen von der Wahl des Koordinatenursprungs ab.

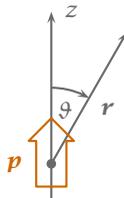
$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'' + \mathbf{a} \\ \varrho(\mathbf{r}') &= \varrho(\mathbf{r}'' + \mathbf{a}) = \varrho_a(\mathbf{r}'') \\ \mathbf{p} &= \int_V \varrho_a(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'' + \mathbf{a}) dV'' = \mathbf{p}_a + \mathbf{a}q_{\text{tot}} \end{aligned}$$

\mathbf{p} ist also unabhängig vom Ursprung genau dann, wenn gilt $q_{\text{tot}} = 0$.

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = -\nabla \phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}]} \\ (\nabla \phi_2(\mathbf{r}))_\alpha = \partial_\alpha p_\beta x_\beta (x_\gamma x_\gamma)^{-3/2} \\ = p_\beta \left[\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} - x_\beta \frac{3}{2} (x_\delta x_\delta)^{-5/2} 2\delta_{\alpha\gamma} x_\gamma \right] \\ = p_\beta \left[\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} - 3x_\alpha x_\beta r^{-5} \right] \\ = \frac{1}{r^3} \left[p_\alpha - 3 \frac{x_\alpha}{r} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r} \right] \end{aligned}$$

Ein Dipol in z-Richtung hat die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (0, 0, p) \\ \phi_2(\mathbf{r}) &= p \frac{\cos \vartheta}{r^2} \\ r(\vartheta) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{p \cos \vartheta}{\phi_2}} & , 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{\frac{p(-\cos \vartheta)}{(-\phi_2)}} & , \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

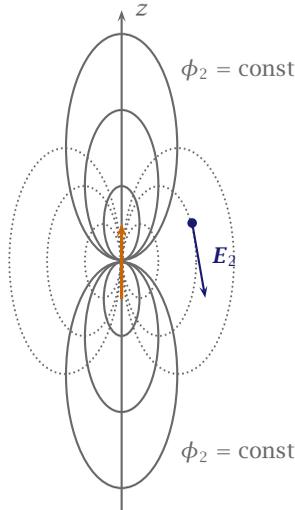


Ersatzladungsverteilung

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \phi_2 &= -4\pi \varrho_2 \\
 &= -(\mathbf{p} \cdot \nabla) \nabla^2 \frac{1}{r} \\
 &= 4\pi (\mathbf{p} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r}) \\
 \boxed{\varrho_2} &= -(\mathbf{p} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r})
 \end{aligned}$$

 mit $\mathbf{p} = (0, 0, p)$

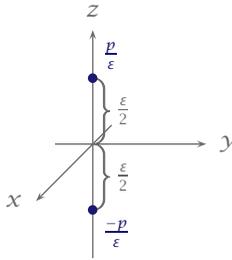
$$\begin{aligned}
 \varrho_2(\mathbf{r}) &= -p \partial_z \delta(x) \delta(y) \delta(z) \\
 &= -p \delta(x) \delta(y) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\delta\left(z + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \delta\left(z - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right] \\
 &= \delta(x) \delta(y) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{p}{\varepsilon} \delta\left(z - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{-p}{\varepsilon} \delta\left(z - \frac{-\varepsilon}{2}\right) \right]
 \end{aligned}$$



► 53 Fernfeldnäherung eines Dipols in z-Richtung.

$$\begin{aligned}
 3.) \phi_3(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2r^5} \int dV' \varrho(\mathbf{r}') \left[3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 \right] \\
 &= \frac{1}{6r^5} \int dV' \varrho(\mathbf{r}') \left[9(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - 3r'^2 r^2 - 3r^2 r'^2 + 3r^2 r'^2 \right] \\
 &= \frac{1}{6r^5} \int dV' \varrho(\mathbf{r}') \left[9x_\alpha x'_\alpha x_\beta x'_\beta - r'^2 3x_\alpha x_\alpha - 3r^2 x'_\alpha x'_\alpha + r^2 r'^2 \delta_{\alpha\alpha} \right] \\
 &= \frac{1}{6r^5} \int dV' \varrho(\mathbf{r}') \left[3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta} \right] \left[3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\beta\beta} \right]
 \end{aligned}$$

Das elektrische Quadrupolpotential und der Tensor des Quadrupolmoments lauten



► 54 Die Ersatzladungsdichte eines Dipols in z-Richtung.

also

$$\begin{aligned}
 \phi_3(\mathbf{r}) &= \frac{1}{6} Q_{\alpha\beta} \frac{3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}}{r^5} \\
 &= \frac{1}{6} Q_{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \frac{1}{r} \\
 &= \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5}, \quad \text{da } Q_{\alpha\alpha} = \text{tr } Q = 0 \\
 Q_{\alpha\beta} &:= \int dV' \varrho(\mathbf{r}') [3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}]
 \end{aligned}$$

Abhängigkeit vom Bezugssystem: Wir betrachten folgende Situation:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'' + \mathbf{a}, \quad \varrho(\mathbf{r}') = \varrho(\mathbf{r}'' + \mathbf{a}) = \varrho_a(\mathbf{r}'') \\
 Q_{\alpha\beta} &= \int \varrho_a(\mathbf{r}'') [3(x''_\alpha + a_\alpha)(x''_\beta + a_\beta) - (\mathbf{r}'' + \mathbf{a})^2 \delta_{\alpha\beta}] dV'' \\
 &= \int \varrho_a(\mathbf{r}'') [3x''_\alpha x''_\beta + 3a_\alpha x''_\beta + 3a_\beta x''_\alpha + 3a_\alpha a_\beta - r''^2 \delta_{\alpha\beta} \\
 &\quad - 2\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{a} \delta_{\alpha\beta} - a^2 \delta_{\alpha\beta}] dV''
 \end{aligned}$$

fassen wir dies nun zusammen und nutzen die Definition den elektrischen Dipolmoments aus, so erhalten wir:

$$= Q_{\alpha\beta}^{(a)} + 3a_\alpha p_\beta^{(a)} + 3a_\beta p_\alpha^{(a)} + (3a_\alpha a_\beta - a^2 \delta_{\alpha\beta}) q_{\text{tot}} - 2\delta_{\alpha\beta} \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}^{(a)}$$

Daraus folgt, dass wenn $q_{\text{tot}} = 0 = \mathbf{p}$ ist, dann ist $Q_{\alpha\beta}$ unabhängig vom Bezugssystem.

Wir wollen uns nun noch einige Eigenschaften des Quadrupoltensors Q vergegenwärtigen:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

- Der Quadrupoltensor ist symmetrisch, d.h. es gilt $Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha}$, damit haben wir $9 - 3 = 6$ unabhängige (reelle) Elemente
- Der Quadrupoltensor ist spurfrei, d.h. $Q_{\alpha\alpha} = \text{tr}(Q) = 0$, damit haben wir nur noch $6 - 1 = 5$ unabhängige Elemente

- Der Quadrupoltensor Q kann durch eine orthogonale Transformation des Koordinatensystems, was einer Drehung entspricht, auf »Hauptachsen« transformiert, d.h. diagonalisiert werden. Er nimmt dann folgende Form an:

$$Q \xrightarrow{\text{Drehung}} \begin{pmatrix} Q'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{33} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $Q'_{\alpha\alpha} = 0$, wegen der Invarianz der Spur bei orthogonalen Transformationen. Damit haben wir in Diagonalform lediglich zwei unabhängige Elemente. Im Allgemeinen aber legen zwei Matrixelemente die »Stärke« fest und drei Matrixelemente die »Orientierung«.

Ersatzladungsverteilung Wir untersuchen auch hier, analog zum Monopol- und Dipolpotential die Ersatzladungsverteilung beim elektrischen Quadrupolpotential. Hierzu betrachten wir die zugehörige Poissongleichung.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_3 &= -4\pi \varrho_3 = \frac{1}{6} Q_{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \frac{1}{6} Q_{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \delta(\mathbf{r}) \\ \Rightarrow \varrho_3(\mathbf{r}) &= \frac{1}{6} Q_{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \delta(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Bemerkung: Im Gegensatz zu ϱ_1 und ϱ_2 sind für ϱ_3 die Ersatzladungen und dessen Lagen durch $Q_{\alpha\beta}$ nicht mehr *eindeutig* bestimmt.

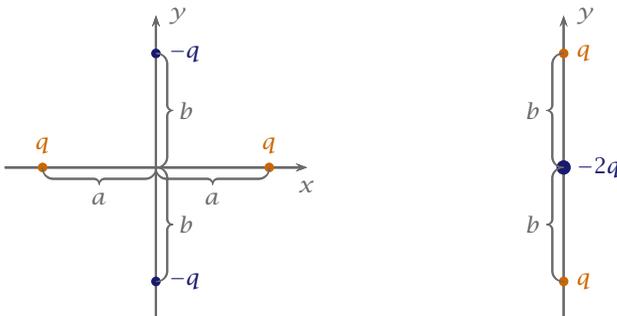
Im Allgemeinen benötigt man mindestens vier Ladungen q_i , um einen Quadrupol zu erzeugen, denn:

Zur Vermeidung eines Mono- oder eines Dipolfeldes muss gelten:

$$\sum_i q_i = 0, \text{ und } \sum_i q_i \mathbf{r}_i = 0.$$

Wir haben also vier Gleichungen, zu deren Erfüllung man vier q_i benötigt. →

2.2.1.1 Beispiele



- 55 Links: Eine mögliche Anordnung eines Quadrupols. Rechts: Getreckter Quadrupol.

► **Beispiel** Allgemein: Im Fall einer *rotationsinvarianten* Ladungsverteilung kann der Quadrupoltensor Q stets geschrieben werden als:

$$Q = \begin{pmatrix} -Q & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & 2Q \end{pmatrix}$$

dabei heißt

$$\frac{1}{2}Q_{33} = -Q$$

Quadrupolmoment. Rotationsinvariant heißt dabei, dass $Q_{xx} = Q_{yy}$, womit Q_{zz} wegen $\text{tr}(Q) = 0$ festliegt. Weiterhin gilt:

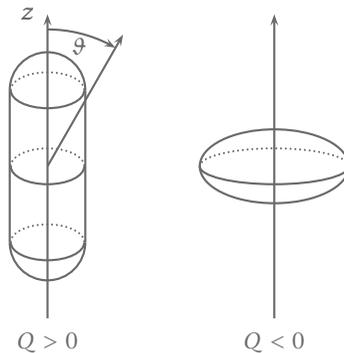
$$Q_{zz} = \int \varrho(\mathbf{r}') [3z'^2 - r'^2] dV' \underset{\varrho=\text{const}>0}{=} -\varrho \int_V [x^2 + y^2 - 2z^2] dV$$

Für das Quadrupolmoment Q können anhand der Abbildung 56 folgende Überlegungen angestellt werden:

$$Q = \frac{1}{2}Q_{zz} \geq 0$$

falls V so, dass überwiegend

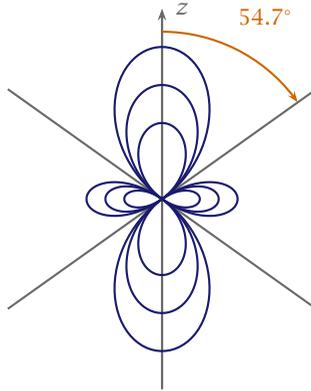
$$z^2 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$



► 56 Rotationsinvariante Ladungsverteilungen.

► **Beispiel** Gestreckter Quadrupol:

$$\begin{aligned} \phi_3(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} = \frac{1}{2r^5} \sum_\alpha Q_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 \\ &= \frac{Q}{2r^5} [-x^2 - y^2 + 2z^2] \\ &= \frac{Q}{2r^5} [3z^2 - r^2] \\ &= \frac{Q}{2r^3} [3\cos^2 \vartheta - 1] \end{aligned}$$



► 57 Fernfeld eines gestreckten Quadrupols.

Damit verschwindet der Zähler für $\cos^2 \vartheta = 1/3 \Rightarrow \vartheta_0 = 54.7^\circ, 125.3^\circ$. Wir betrachten hier den Fall, dass $\phi_3 = \text{const}$ ist, d.h., wenn der Zähler gegen Null geht muss auch der Nenner gegen Null gehen. Dies erklärt das Einschnüren der oben abgebildeten Äquipotentiallinien. Denn für diese Winkel muss $r \rightarrow 0$ gehen, um $\phi = \text{const}$ zu erreichen. ◀

Zusammenfassung:

$$\phi(\mathbf{r}) = \underbrace{\frac{q_{\text{tot}}}{r}}_{\substack{\text{Mono-} \\ \sim \frac{1}{r}}} + \underbrace{\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}}_{\substack{\text{Di-} \\ \sim \frac{1}{r^2}}} + \underbrace{\frac{1}{6} Q_{\alpha\beta} \frac{3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}}{r^5}}_{\substack{\text{Quadrupol} \\ \sim \frac{1}{r^3}}} + \dots$$

-o

Weitere Formen der Multipolentwicklung: Wir betrachten Abbildung 58, was der Konstruktion der Kugelkoordinaten entspricht. Für den Betrag des Abstandes der Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}' gilt:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}, \quad \text{mit } \cos \gamma = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rr'}$$

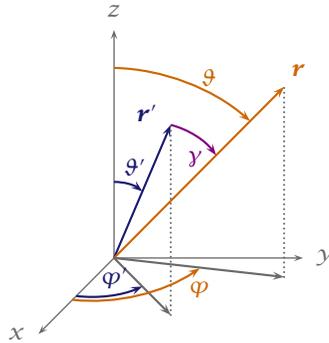
Wir führen die Definitionen

$$r_> = \max(r, r')$$

$$r_< = \min(r, r')$$

ein.

Für die Multipolentwicklung müssen wir $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ betrachten. Mit den obigen Definitionen erhalten wir damit:



► 58 Zur Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten.

$$\begin{aligned}
 1.) \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r_{>}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 - 2\frac{r_{<}}{r_{>}} \cos \gamma}} \\
 &= \frac{1}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \gamma)
 \end{aligned}$$

Dabei sind $P_{\ell}(\cos \gamma)$ die *Legendre-Polynome* ℓ -ten Grades in $\cos \gamma$.

- 2.) Für den allgemeinen Fall gilt es $\cos \gamma$ durch ϑ, φ und ϑ', φ' auszudrücken. Wird dies gemacht, so erhalten wir:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{4\pi}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^{\ell} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) Y_{\ell,m}^*(\vartheta', \varphi')$$

Dabei gibt $Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$ Informationen über r und $Y_{\ell,m}^*(\vartheta', \varphi')$ Informationen über r' . Damit erhalten wir die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}) &= \int \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) \int_V \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} Y_{\ell,m}^*(\vartheta', \varphi') \varrho(\mathbf{r}') dV'
 \end{aligned}$$

Dies ist der allgemeine Fall einer Multipolentwicklung, womit auch innerhalb des Bereichs der Ladungsverteilung das entsprechende Potential (Mono-, Di-, Quadrupol) berechnet werden kann.

Im Fernfeld ($\mathbf{r} \notin V$):

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)}{r^{\ell+1}} \underbrace{\int_V r'^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\vartheta', \varphi') \varrho(\mathbf{r}') dV'}_{\text{Multipolmomente: } q_{\ell m}}$$

Hierbei gilt:

$\ell = 0$: Monopol

$\ell = 1$: Dipol

$\ell = 2$: Quadrupol

zu jedem ℓ gibt es $2\ell + 1$ unabhängige Komponenten.

2.2.2 Vektorpotential A: Magnetostatik

Im Fall der Magnetostatik haben ist das Potential keine skalare Funktion $\phi(\mathbf{r})$ mehr. Vielmehr liegt ein Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, das sogenannte *Vektorpotential* vor. Hierfür gilt:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

wobei man aus der Taylorentwicklung

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots$$

erhält. In den Übungen wurde gezeigt, dass sich aus der entsprechenden Multipolentwicklung Folgendes ergibt:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$$

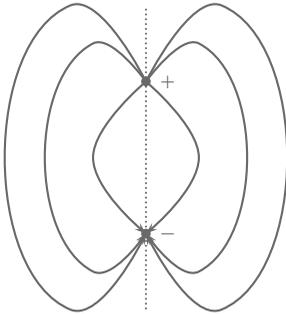
$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \text{ (magnetisches Dipolpotential)}$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \text{ (magn. Dipolmoment)}$$

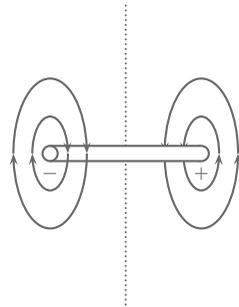
$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^5} [3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - m r^2] \text{ (magn. Dipolfeld)}$$

$$\mathbf{m} = \frac{IF}{c} \mathbf{n}$$

Vergleich: Elektrischer Dipol versus magnetischer Dipol.



$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{r^5} [3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - p r^2]$$



$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{r^5} [3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - m r^2]$$

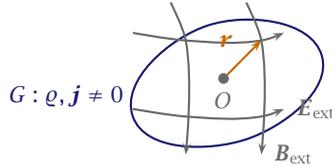
Ladungen: Quellen, keine Wirbel

Strom: Wirbel, keine Quellen

Insgesamt gilt: \mathbf{p} und \mathbf{m} sind punktförmig, was einen gleichen Feldverlauf zur Folge hat. \rightarrow

2.3 Kräfte und Drehmomente auf lokalisierte Ladung- und Stromverteilungen

Wir betrachten ein Gebiet G in einem äußeren Magnetfeld \mathbf{B}^{ext} und einem elektrischen Feld \mathbf{E}^{ext} . Die Vorgabe für die beiden Felder sei, dass sie nur langsam in G variieren.



► 59 Das Gebiet G mit den es durchsetzenden Feldern E_{ext} und B_{ext} .

Zunächst Taylor-entwickeln wir die beiden Felder um 0:

$$E_{\alpha}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = E_{\alpha}^{\text{ext}}(0) + x_{\beta} \partial_{\beta} E_{\alpha}^{\text{ext}}(0) + \frac{1}{2} x_{\beta} x_{\gamma} \partial_{\beta} \partial_{\gamma} E_{\alpha}^{\text{ext}}(0) + \dots$$

Für das Magnetfeld gilt dementsprechend:

$$B_{\alpha}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = B_{\alpha}^{\text{ext}}(0) + x_{\beta} \partial_{\beta} B_{\alpha}^{\text{ext}}(0) + \frac{1}{2} x_{\beta} x_{\gamma} \partial_{\beta} \partial_{\gamma} B_{\alpha}^{\text{ext}}(0) + \dots$$

Die beiden Felder sind statische äußere Felder. Mit Hilfe der Lorentzkraftdichte \mathbf{k} lässt sich nun die Kraft \mathbf{K} bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_G \mathbf{k}(\mathbf{r}) \, dV \\ &= \int_G \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) \, dV + \frac{1}{c} \int_G \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) \, dV \\ &= \mathbf{K}_{\text{el}} + \mathbf{K}_{\text{mag}}. \end{aligned}$$

In G gilt:

$$\nabla \times \mathbf{E}^{\text{ext}} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{E}^{\text{ext}} = 0,$$

da es sich um externe Felder und statische Felder handelt. Betrachten wir nun die Rotation des äußeren elektrischen Feldes:

$$\nabla \times \mathbf{E}^{\text{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{\gamma} E_{\alpha}^{\text{ext}} = \partial_{\alpha} E_{\gamma}^{\text{ext}}$$

Weiter folgt, dass

$$\partial_{\beta} \partial_{\gamma} E_{\alpha}^{\text{ext}} = \partial_{\beta} \partial_{\alpha} E_{\gamma}^{\text{ext}}.$$

Betrachten wir nun $\beta = \gamma$ so gilt für die obige Beziehung:

$$\begin{aligned} \partial_{\beta} \partial_{\beta} E_{\alpha}^{\text{ext}} &= \nabla^2 E_{\alpha}^{\text{ext}} \\ &= \partial_{\alpha} \partial_{\beta} E_{\beta}^{\text{ext}} \\ &= \partial_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{E}^{\text{ext}} = 0 \\ \Rightarrow \nabla^2 E_{\alpha}^{\text{ext}} &= 0 \end{aligned}$$

Betrachten wir komponentenweise gilt:

$$\delta_{\beta\gamma} \partial_\beta \partial_\gamma E_\alpha^{\text{ext}} = 0$$

Damit folgt:

$$x_\beta x_\gamma \partial_\beta \partial_\gamma E_\alpha^{\text{ext}} = \frac{1}{3} (3x_\beta x_\gamma - \underbrace{r^2 \delta_{\beta\gamma}}_{=0}) \partial_\beta \partial_\gamma E_\alpha^{\text{ext}}$$

Somit folgt für die α -Komponente der Kraft \mathbf{K}^{el} :

$$\begin{aligned} K_\alpha^{\text{el}} &= E_\alpha^{\text{ext}}(0) \int_G \varrho(\mathbf{r}) dV + \partial_\beta \alpha^{\text{ext}}(0) \int_G x_\beta \varrho(\mathbf{r}) dV \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial_\beta \partial_\gamma E_\alpha^{\text{ext}}(0)) \int_G \frac{1}{3} (3x_\beta x_\gamma - r^2 \delta_{\beta\gamma}) \varrho(\mathbf{r}) dV + \dots \end{aligned}$$

In Vektoren ergibt sich somit für die elektrische Kraft:

$$\mathbf{K} = q_{\text{tot}} \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + \frac{1}{6} (Q_{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta) \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + \dots$$

$Q_{\alpha\beta}$ entspricht hierbei dem Quadrupoltensor.

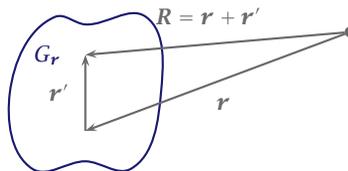
Speziell: Kraft, die auf einen Dipol \mathbf{p} , der sich am Ort $\mathbf{r}_{\text{Dipol}}$ befindet, durch ein äußeres Feld \mathbf{E}^{ext} ausgeübt wird:

$$\mathbf{K}_{\text{el}}^{\text{Dipol}} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}^{\text{ext}}|_{\mathbf{r}_{\text{Dipol}}}$$

Im folgenden wollen wir nun die magnetische Kraft $\mathbf{K}_{\text{mag}} \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}}(0)$ gib keinen Beitrag, da:

$$\int_G \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV = 0.$$

Wir betrachten somit das Kreuzprodukt von Stromdichte und externen Magnetfeld, wobei wir aber beachten, dass die Stromdichte nach 0 verschoben wird, also mit $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{r}'$:



► 60 Gebiet G_r mit Koordinatensystem relativ zum Aufpunkt

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{mag}} &= \frac{1}{c} \int_{G_r} \mathbf{j}(\mathbf{R}) \times \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{R}) d^3 R \\ &= \frac{1}{c} \int_{G_0} \mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d^3 r' \end{aligned}$$

Mit einer Taylorentwicklung von $\mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}')$ um \mathbf{r} folgt:

$$\equiv \frac{1}{c} \int_{G_0} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') \times [\mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \mathbf{r}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \mathbf{B}^{\text{ext}} + \dots] d^3 \mathbf{r}'$$

\mathbf{j} ist die Stromdichte um \mathbf{r} , $\tilde{\mathbf{j}}$ ist die gleiche Stromdichte, aber nach 0 verschoben. Die magnetische Kraft auf einen Dipol ergibt sich somit zu:

$$\mathbf{K}_{\text{mag}}^{\text{Dipol}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_G \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times [(\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r})] dV'$$

Nebenrechnung: Wir wollen den hinteren Term des Integrals etwas genauer analysieren und verwenden dabei die Eigenschaft

$$\text{rot } \mathbf{B}^{\text{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\beta B_\alpha^{\text{ext}} = \partial_\alpha B_\beta^{\text{ext}}.$$

Für den Term des hinteren Integrals bedeutet dies:

$$\begin{aligned} [(\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r})]_\alpha &= x'_\beta \partial_\beta B_\alpha^{\text{ext}} \\ &= x'_\beta \partial_\alpha B_\beta^{\text{ext}} \\ &= \partial_\alpha (x'_\beta B_\beta^{\text{ext}}) \\ &= [\text{grad}_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}})]_\alpha \end{aligned} \quad \rightarrow$$

Damit ergibt sich für die magnetische Kraft auf einen Dipol:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{mag}}^{\text{Dipol}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int_G \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}'}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r})) dV' \\ &= -\frac{1}{c} \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_G \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}}) dV' \end{aligned}$$

Übung: Aus den Übungen sollte folgender integraler Zusammenhang bekannt sein:

$$\begin{aligned} \int_G (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' &= -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \int_G (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) dV' \\ &= c \mathbf{m} \times \mathbf{r} = -c \mathbf{r} \times \mathbf{m} \end{aligned} \quad (2.1)$$

In unserer jetzigen Betrachtung wird \mathbf{r} mit \mathbf{B} ersetzt. →

Mit Gleichung (2.1) kann $\mathbf{K}_{\text{mag}}^{\text{Dipol}}$ umgeschrieben werden:

$$\mathbf{K}_{\text{mag}}^{\text{Dipol}} = \nabla_{\mathbf{r}} \times [\mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{m}]$$

Mit $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ folgt:

$$= (\mathbf{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mathbf{m} \underbrace{(\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}))}_{=0}$$

Mit der obigen Nebenrechnung, wobei \mathbf{r}' mit \mathbf{m} ersetzt wird folgt:

$$= \text{grad}_{\mathbf{r}}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}))$$

Damit gilt für die magnetische Kraft auf einen Dipol:

$$\boxed{\mathbf{K}_{\text{mag}}^{\text{Dipol}} = (\mathbf{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}_{\text{Dipol}}} = \nabla_{\mathbf{r}}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}))|_{\mathbf{r}_{\text{Dipol}}}}$$

Bemerkung: Bekanntlich gilt für die Kraft folgende Beziehung:

$$\mathbf{K} = -\nabla U_{\text{pot}},$$

wobei U_{pot} das Potential ist. Die potentielle Energie eines permanenten magnetischen Moment (oder Dipol) in einen externen Magnetfeld kann entweder von einer Kraft, oder von einem Drehmoment erhalten werden. Interpretieren wir die Kraft als negativen Gradienten eines Potentials U_{pot} , finden wir

$$U_{\text{pot}} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}.$$

Es zeigt sich, dass \mathbf{m} eine parallele Orientierung zu \mathbf{B} erreichen möchte, damit U_{pot} minimal ist. ~

Drehmomente: Für das Drehmoment N gilt

$$\begin{aligned} N &= \int_G \mathbf{p} \times \mathbf{k}(\mathbf{r}) \, dV \\ &= N_{\text{el}} + N_{\text{mag}}. \end{aligned}$$

Für ein elektrisches, bzw. magnetisches *Drehmoment eines Dipols* gilt:

$$\boxed{N_{\text{el}}^{\text{Dipol}} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}^{\text{ext}}|_{\mathbf{r}_{\text{Dipol}}} \quad \text{und} \quad N_{\text{mag}}^{\text{Dipol}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}^{\text{ext}}|_{\mathbf{r}_{\text{Dipol}}}}$$

Betrachten wir zuerst das elektrische Drehmoment:

$$\begin{aligned} N_{\text{el}} &= \int_G \mathbf{r} \times \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) \, dV \\ &= -\mathbf{E}^{\text{ext}}(0) \times \underbrace{\int_G \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \, dV}_{=\mathbf{p}} \\ &= -\mathbf{E}^{\text{ext}} \times \mathbf{p} \end{aligned}$$

Für das magnetische Drehmoment gilt:

$$\begin{aligned} N_{\text{mag}} &= \frac{1}{c} \int_G \mathbf{r} \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}^{\text{ext}}(0)) \, dV \\ &= \frac{1}{c} \int_G [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}}(0)) \mathbf{j}(\mathbf{r}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})) \mathbf{B}^{\text{ext}}(0)] \, dV \end{aligned}$$

Durch Verwendung von Gleichung (2.1), wobei $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ und $\mathbf{B}^{\text{ext}}(0) \rightarrow \mathbf{r}$, wird aus dem linken Term des Integrand:

$$= \mathbf{m} \times \mathbf{B}^{\text{ext}}(0) - \frac{1}{c} \mathbf{B}^{\text{ext}}(0) \underbrace{\int_G (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})) \, dV}_{=0}$$

Der zweite Term verschwindet, da

$$\int_G x_j j_\beta \, dV = - \int_G x_\beta j_\alpha \, dV,$$

falls j in G lokalisiert ist. Für $\alpha = \beta$ (aber ohne Summenkonvention)

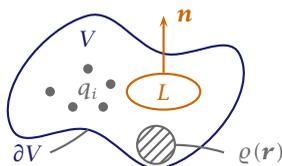
$$\int_G x_\alpha j_\alpha dV = 0.$$

Zur Erzeugung von Kräften braucht man also Feldgradienten, für Drehmomente nicht.

Fazit: Dipole erfahren in homogenen Feldern Drehmomente aber keine Kräfte, inhomogene Felder üben auf Dipole Kräfte aus. →

2.4 Elektrostatik im begrenzten Raum (Randwertprobleme)

Wir betrachten ein Volumen V in dem ein Leiter L mit dem Rand ∂L ist, Ladungen q_i , sowie eine Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{r})$. Der Rand des Volumen V ist ∂V . Bezüglich des Leiters ist V außen. Der Normalenvektor \mathbf{n} des Leiters steht senkrecht auf dessen Rand und zeigt ins Innere von V (bezüglich des Leiters also nach außen).



► 61 Ein in ein Volumen V eingebetteter Leiter L .

Es gilt:

- $E = 0$ im Leiter (Statik)
- $\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\partial L}$ stetig (Stetigkeit der Tangentialkomponente)
- $E \perp \partial L$ impliziert, dass ∂L eine Fläche konstanten Potentials ist (Äquipotentialfläche)
- $E_n := \mathbf{E}^{\text{außen}} \cdot \mathbf{n}|_{\partial L} = -\mathbf{n} \cdot \nabla \phi|_{\partial L} = 4\pi\sigma$, wobei σ auf ∂L einen Strom in E_n erzeugt.

2.4.1 Randwertaufgaben der Potentialtheorie im begrenzten Raum V

Wir betrachten die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\varrho$$

in V mit zwei Arten von Randbedingungen, die *Dirichlet-Randbedingung* und die *Neumann-Randbedingung*.

Dirichlet-Randbedingung (D): Gesucht wird eine Lösung der Poisson-Gleichung, für die ϕ auf im Endlichen gelegenen vorgegebenen Flächen (hier ∂L) eine gegebene Funktion

$$\phi|_{\partial L} = f(\mathbf{r})$$

ist und gegebenenfalls für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ mindestens wie $1/r$ abfällt.

Neumann-Randbedingung (vNM): Gesucht wird eine Lösung der Poisson-Gleichung, für die $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \partial_n \phi$ auf im Endlichen gelegenen vorgegebenen Flächen (hier ∂L) gegebene Werte

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi|_{\partial L} = -E_n = g(\mathbf{r})$$

annimmt und gegebenenfalls für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ mindestens wie $1/r^2$ abfällt.

BEWEIS Eindeutigkeit der Lösung.

Seien ϕ_1 und ϕ_2 zwei Lösungen zum gleichen $f(D)$ bzw. $f(\text{vNM})$. Wie definieren zunächst eine Funktion ψ mit

$$\psi := \phi_1 - \phi_2,$$

die die Eigenschaft

$$\nabla \psi = 0 \quad \text{und} \quad \begin{cases} \psi|_{\partial V} = 0 \\ \partial_n \psi|_{\partial V} = 0 \end{cases}, \text{ bzw.}$$

erfüllt. Wir betrachten nun das Integral

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \psi)^2 dV &= \int_V (\nabla \psi) (\nabla \psi) dV \\ &= \int_V \left[\operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \psi) - \underbrace{\psi \Delta \psi}_{=0} \right] dV \\ &= \int_{\partial V} \psi (\operatorname{grad} \psi) d\mathbf{f} \\ &= \int_{\partial V} \psi \partial_n \psi d\mathbf{f} \end{aligned}$$

Unabhängig davon welche Randbedingung nun verwendet wird, bzw. gegeben ist — das Integral verschwindet. Damit folgt, dass $\nabla \psi = 0$ in $V \cup \partial V$ ist und $\psi = \text{const}$ in $V \cup \partial V$ ist. Je nach Randbedingung gilt also:

$$\psi = \begin{cases} 0 & , \text{ in } V \text{ für (D)} \\ \text{const} & , \text{ in } V \text{ für (vNM)} \end{cases}$$

Damit ist der Beweis der Eindeutigkeit von ϕ für beide Randbedingungen erbracht. ■

Für das Lösen der Poisson-Gleichung wurden verschiedene Lösungsmethoden entwickelt, die wichtigsten sind

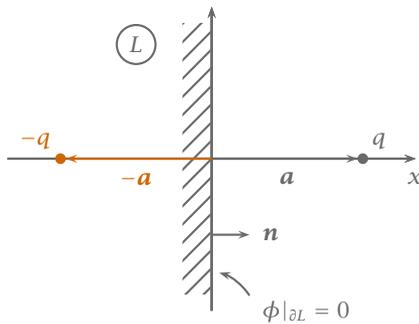
- ▶ Spiegelungsmethode
- ▶ Greensche Funktion
- ▶ Methode der Inversion
- ▶ Separation der Variablen

Bemerkung: Randwertprobleme treten in der Physik in vielen Gebieten auf:

- ▶ Hydrodynamik
- ▶ Elastizitätstheorie
- ▶ Quantenmechanik

2.4.2 Beispiel zu Spiegelungsmethode

▶ *Beispiel* Der leitende Halbraum, ein Dirichlet-Problem: Wir betrachten eine Punktladung q die sich auf der x -Achse bei $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ eines Koordinatensystems befindet und ein Leiter, dessen Oberfläche durch die y -Achse und z -Achse aufgespannt wird. Die Ladung befinde sich vor diesem Leiter.



▶ 62 Der leitende Halbraum.

Im folgenden Abschnitt wollen wir das Potential ϕ mit einer gegebenen Dirichlet-Randbedingung lösen. Es gilt die Poisson-Gleichung:

$$\Delta\phi = -4\pi q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}),$$

und die Randbedingung

$$\phi|_{\partial L} = 0.$$

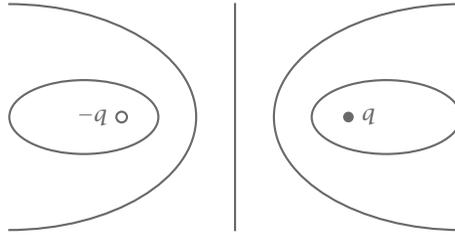
Gesucht ist also das Potential $\phi(\mathbf{r})$ für $x > 0$. Dies erreichen wir durch Einführung einer zusätzlichen Ladung $-q$ bei $\mathbf{r} = -\mathbf{a}$. Der Leiter sei geerdet, d.h. er besitzt das gleiche Potential auf der Oberfläche wie im unendlichen, d.h. 0.

Die Lösung der Poisson-Gleichung sei gegeben durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} \tag{2.2}$$

Für $x > 0$ bedeutet dies für die Poisson-Gleichung:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -4\pi q \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) - \delta(\mathbf{r} + \mathbf{a}) \} \stackrel{!}{=} 4\pi q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}).$$



► 63 Äquipotentialflächen des leitenden Halbraumes.

Somit lautet das gesuchte Potential:

$$\phi(\mathbf{r}) = q \left[((x - a)^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + ((x + a)^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right].$$

Für $x = 0$ bedeutet dies, dass das Potential verschwindet:

$$\phi(\mathbf{r})|_{x=0} = 0.$$

Fazit: Gleichung (2.2) ist die eindeutige Lösung der Randwertproblems. ~

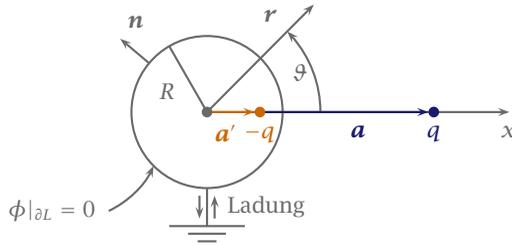
Für die Influenzladung $\sigma(y, z)$ auf der Leiteroberfläche gilt

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n} \cdot \nabla\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \nabla\phi \\ &= -\partial_x\phi|_{x=0} \\ &= \frac{-2qa}{\underbrace{(a^2 + y^2 + z^2)}_{=r^2}}^{3/2} \end{aligned}$$

Die gesamte induzierte Ladung berechnet sich aus

$$\begin{aligned} \int_{\partial L} \sigma(y, z) \, df &= -\frac{2qa}{4\pi} 2\pi \int_0^\infty r (a^2 + r^2)^{-3/2} \, dr \\ &= -qa \int_0^\infty \frac{d}{dr} \left((-1) (a^2 + r^2)^{-1/2} \right) \, dr \\ &= qa (a^2 + r^2)^{-1/2} \Big|_0^\infty \\ &= -qa (a^2)^{-1/2} \\ &= -q \end{aligned}$$

D.h. die gesamte Influenzladung ist entgegengesetzt gleich groß zur verursachenden Punktladung. ◀



► 64 Eine geerdete, leitende Kugel und eine außerhalb ruhende Ladung q .

► *Beispiel* Die geerdete, leitende Kugel

Im Folgenden wollen wir einen Ausdruck für das Potential $\phi(\mathbf{r})$ außerhalb der Kugel suchen. Zudem wissen wir, dass der Kugelmantel eine Äquipotentialfläche sein muss, mit der Bedingung $\phi|_{r=R} = 0$ (geerdet). Als Ansatz benutzen wir ein Potential, welches die Poisson-Gleichung für $r > R$ löst.

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}'|}$$

Betrachten wir nun die Randbedingung so erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi|_{r=R} = 0 &= \frac{q}{|R\hat{\mathbf{r}} - a\hat{\mathbf{x}}|} - \frac{q'}{|R\hat{\mathbf{r}} - a'\hat{\mathbf{x}}|} \\ \Rightarrow \left(\frac{q}{q'}\right)^2 &= \frac{|R\hat{\mathbf{r}} - a\hat{\mathbf{x}}|^2}{|R\hat{\mathbf{r}} - a'\hat{\mathbf{x}}|^2} = \frac{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \vartheta}{R^2 + a'^2 - 2Ra' \cos \vartheta} \\ \underbrace{\left(\frac{q}{q'}\right)^2 (R^2 + a'^2) - (R^2 + a^2)}_{=0 \text{ (2.3)}} &- \underbrace{\left[\left(\frac{q}{q'}\right)^2 2Ra' - 2Ra\right]}_{=0 \text{ (2.4)}} \cos \vartheta = 0 \end{aligned}$$

Die beiden Terme müssen unabhängig voneinander verschwinden, da die Randbedingung unabhängig vom Winkel sein muss. Man erhält nun also zwei Bedingungen, bzw. zwei Gleichungen für zwei Unbekannte

$$\left(\frac{q}{q'}\right)^2 = \frac{R^2 + a^2}{R^2 + a'^2} \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{q}{q'}\right)^2 = \frac{a}{a'} \tag{2.4}$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen liefert

$$\frac{R^2 + a^2}{R^2 + a'^2} = \frac{a}{a'} \Rightarrow a'^2 - a' \left(a + \frac{R^2}{a}\right) + R^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung besitzt die zwei Lösungen

$$\begin{aligned} a'_{1/2} &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{R^2}{a} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(a + \frac{R^2}{a} \right)^2 - R^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{R^2}{a} \right) \pm \frac{1}{2} \left(a - \frac{R^2}{a} \right) \\ &= \begin{cases} a \\ \frac{R^2}{a} \end{cases} \text{ richtige Lösung} \end{aligned}$$

Wir betrachten hierbei nur eine Lösung der quadratischen Gleichung, da die zweite $a' = a$ wenig Sinn ergibt. Wir erhalten schließlich für die Position unserer Spiegelladung

$$a' \cdot a = R^2$$

Dieses Ergebnis ist auch als Spiegelung am Kreis bekannt. Setzen wir nun unser Ergebnis in eine der zwei Bedingungen von oben ein, so ergibt sich

$$\left(\frac{q}{q'} \right)^2 = \frac{a'}{a} = \frac{R^2}{a^2} \Rightarrow q' = \pm q \frac{R}{a}$$

Wir betrachten nur die Lösung $q' = q \frac{R}{a}$, da nur sie die Bedingung $\phi|_{r=R} = 0$ erfüllen kann. Der Lohn unserer Arbeit besteht darin, das Potential nun in Abhängigkeit von R und a für den Außenraum niederschreiben zu können

$$\phi(\mathbf{r}) = q \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{R}{a} \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \frac{R^2}{a} \mathbf{a} \right|} \right)$$

Betrachten wir nun die Influenzoberflächenladungsdichte σ der Kugel. Dazu schreiben wir zuerst einmal das Potential um, welches offensichtlich invariant unter Rotation um den Winkel ϑ ist.

$$\phi(r, \vartheta) = q \left[(r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta)^{-\frac{1}{2}} - \frac{R}{a} \left(r^2 + \frac{R^4}{a^2} - 2R^2 \frac{r}{a} \cos \vartheta \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

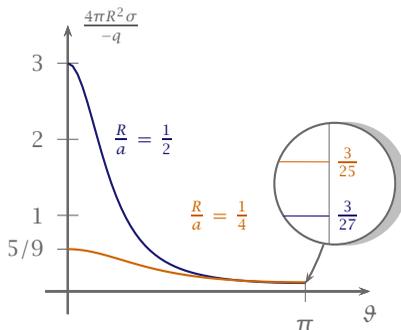
Zudem wissen wir, dass folgender Zusammenhang zwischen dem Potential und der Influenzoberflächenladungsdichte besteht

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{e}_r \cdot \nabla \phi|_{r=R} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

Setzen wir nun unser Potential ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \sigma &= -\frac{q}{4\pi} \left(-\frac{1}{2} \frac{2r - 2a \cos \vartheta}{[r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{R}{a} \frac{2r - 2\frac{R^2}{a} \cos \vartheta}{\left[r^2 + \frac{R^4}{a^2} - 2R^2 \frac{r}{a} \cos \vartheta \right]^{\frac{3}{2}}} \right)_{r=R} \\
 &= -\frac{q}{4\pi} \left(\frac{-R + a \cos \vartheta}{[R^2 + a^2 - 2Ra \cos \vartheta]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{R^2}{a} - \frac{R^3}{a^2} \cos \vartheta}{\left[R^2 + \frac{R^4}{a^2} - 2\frac{R^3}{a} \cos \vartheta \right]^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 &= -\frac{q}{4\pi} \left(\frac{R \left(-1 + \frac{a}{R} \cos \vartheta \right)}{R^3 \left[1 + \left(\frac{a}{R} \right)^2 - 2\frac{a}{R} \cos \vartheta \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{R \left(\frac{R}{a} - \frac{R^2}{a^2} \cos \vartheta \right)}{R^3 \left[1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2\frac{R}{a} \cos \vartheta \right]^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 &= -\frac{q}{4\pi R^2} \left(\frac{-1 + \frac{a}{R} \cos \vartheta}{\left[1 + \left(\frac{a}{R} \right)^2 - 2\frac{a}{R} \cos \vartheta \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{R}{a} \frac{1 - \frac{R}{a} \cos \vartheta}{\left[1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2\frac{R}{a} \cos \vartheta \right]^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 &= -\frac{q}{4\pi R^2} \left(\frac{-1 + \frac{a}{R} \cos \vartheta}{\left(\frac{a}{R} \right)^3 \left[1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2\frac{R}{a} \cos \vartheta \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{R}{a} \frac{1 - \frac{R}{a} \cos \vartheta}{\left[1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2\frac{R}{a} \cos \vartheta \right]^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 &= -\frac{q}{4\pi R^2} \frac{-\left(\frac{R}{a} \right)^3 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 \cos \vartheta + \frac{R}{a} - \frac{R^2}{a^2} \cos \vartheta}{\left[1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2\frac{R}{a} \cos \vartheta \right]^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

$$\sigma(\vartheta) = -\frac{q}{4\pi R^2} \frac{\frac{R}{a} \left(1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right)}{\left[1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2\frac{R}{a} \cos \vartheta \right]^{\frac{3}{2}}}$$



► 65 Influenzoberflächenladungsdichte der geerdeten, leitenden Kugel.

Check:

$$\begin{aligned}
 \int \underbrace{R^2 d\Omega}_{df} \sigma &= 2\pi \int_0^{2\pi} d\vartheta \sin \vartheta \left[-\frac{q}{4\pi} \right] \frac{\frac{R}{a} \left(1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right)}{\left[1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2 \frac{R}{a} \cos \vartheta \right]^{3/2}} \\
 &= -\frac{q}{2} \frac{R}{a} \left(1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right) \underbrace{\int_{-1}^1 dx \left[1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2 \frac{R}{a} x \right]^{-3/2}}_{\frac{q}{R} \int_{-1}^1 dx \frac{d}{dx} \left[1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2 \frac{R}{a} x \right]} \\
 &= -\frac{q}{2} \left(1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right) \left\{ \frac{1}{1 - \frac{R}{a}} - \frac{1}{1 + \frac{R}{a}} \right\} \\
 &= -\frac{q}{2} 2Ra = -q \frac{R}{a} = -q'
 \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Gauß:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial \text{Kugel}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} &= \int_{\text{Kugel}} \operatorname{div} \mathbf{E} dV \\
 &= \int_{\text{Kugel}} 4\pi \varrho(\mathbf{r}) dV \\
 &= \int_{\text{Kugel}} (-q') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}') dV \\
 &= -4\pi q' \\
 \int_{\partial \text{Kugel}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} &= \int_{\partial \text{Kugel}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} df \\
 &= 4\pi \int_{\partial \text{Kugel}} \sigma df \\
 \Rightarrow \int_{\partial \text{Kugel}} \sigma df &= -q'
 \end{aligned}$$

Die Kraft, die auf die Ladung q wirkt kann wie folgt berechnet werden:

$$\mathbf{F} = \int \frac{\sigma df \cdot q}{|\mathbf{a} - \mathbf{R}|^3} (\mathbf{a} - \mathbf{R})$$

Wähle nun \mathbf{a} entlang der z -Achse

$$\begin{aligned}
 &= R^2 q \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \frac{\sigma}{[a^2 + R^2 - 2aR \cos \vartheta]^{3/2}} \begin{pmatrix} -R \sin \vartheta \cos \varphi \\ -R \sin \vartheta \sin \varphi \\ a - R \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \\
 F &= R^2 q \left(-\frac{q}{4\pi R^2} \right) \frac{R}{a} \left(1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right) \frac{2\pi}{a^2} \int_{-1}^1 dx \frac{1 - \frac{R}{a} x}{\left[1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2 \frac{R}{a} x \right]^3}
 \end{aligned}$$

Sei nun $y = ax + b$:

$$\int dx y^{-3} = -\frac{1}{2a} y^{-2}$$

$$\int dx \frac{x}{y^3} = \frac{1}{a^2} \left\{ -\frac{1}{y} + \frac{b}{2y^2} \right\}$$

Mit diesem Wissen:

$$F = -\frac{q^2}{2a^2} \frac{R}{a} \left(1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right) \left\{ \frac{a}{4R} \left[1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2 \frac{R}{a} x \right]^{-2} - \frac{a}{4R} \left[-\frac{1}{1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2 \frac{R}{a} x} + \frac{1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2}{2 \left[1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2 \frac{R}{a} x \right]^2} \right] \right\}_{-1}^1$$

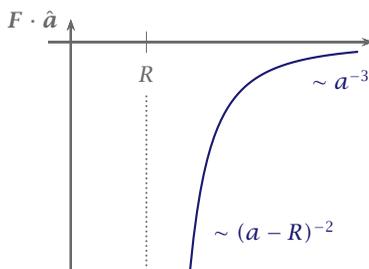
$$= -\frac{q^2}{8a^2} \left(1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right) \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2 \frac{R}{a} x} + \frac{1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2}{2 \left[1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2 \frac{R}{a} x \right]^2} \right\}_{-1}^1$$

$$= \dots$$

$$= -\frac{1}{R^2} \left(\frac{R}{a} \right)^3 \left[1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right]^{-2}$$

$$\boxed{F = -\frac{q^2 \frac{R}{a}}{\left[1 - \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right]^2 a^3}}$$

Dies ist eine attraktive Kraft auf die Ladung q .



► 66 Kraft auf eine Ladung in Abhängigkeit des Abstandes.

Bemerkung: 1.) Kraft auf die Ladung q durch die Spiegelladung q'

$$F = \frac{q \cdot (-q')}{|\mathbf{a} - \mathbf{a}'|^2} \frac{\mathbf{a} - \mathbf{a}'}{|\mathbf{a} - \mathbf{a}'|}$$

$$= -\frac{q^2 \frac{R}{a}}{\left(a - \frac{R^2}{a} \right)^2} \mathbf{a}$$

$$= -\frac{q^2 \frac{R}{a}}{\left[1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2\right]^2} \frac{\mathbf{a}}{a^3}$$

- 2.) Die leitende Kugel ist geerdet, d.h. die Kugel ist an ein Ladungsreservoir angeschlossen. Es folgt also, dass bei Annäherung von q an die Kugel deren Gesamtladung, welche auf der Oberfläche (inhomogen) konzentriert ist, von 0 nach $-q'$ für q von ∞ nach a zunimmt. →

► **Beispiel** Die isolierte, leitende Kugel.

Dieses Mal wird eine Kugel mit der Gesamtladung Q betrachtet, die isoliert ist. Auch hier muss die Randbedingung $\phi|_{r=R} = \text{const}$ erfüllt sein, aber die gesamte induzierte Ladung muss 0 ergeben, da stets die Gesamtladung Q vorhanden sein muss.

Bemerkung: Die Gesamtladung Q ist bei einer leitenden Kugel wegen der Abstoßung der Ladungsträger auch auf die Oberfläche konzentriert. →

Lösung: Die Lösung setzt sich zusammen aus

- 1.) Der Lösung für die geerdete, leitende Kugel. q' und a' sind wie dort gegeben. Dieser Beitrag liefert 0 bei $r = R$.
- 2.) Einem zusätzlichen Term einer Punktladung im Zentrum. Dieser Beitrag liefert eine Konstante bei $r = R$.

Betrachten wir die funktionale Form dieser Lösung:

$$\phi(\mathbf{r}) = \underbrace{\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}}_{\text{vgl. 1.}} + \underbrace{\frac{-q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}'|}}_{\text{vgl. 2.}} + \underbrace{\frac{Q - (-q')}{|\mathbf{r}|}}_{\text{vgl. 2.}}$$

Dieses Potential löst

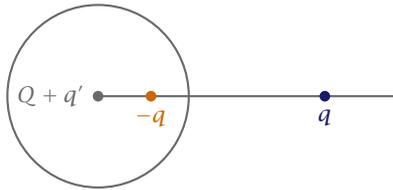
$$\nabla^2 \phi = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$$

im Außenraum und genügt der Randbedingung $\phi|_{r=R} = \text{const}$.

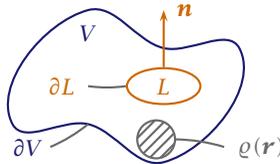
Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned} \text{Gesamte induzierte Ladung} &= \text{Summe der Bildladungen} \\ &= -q' + Q - (-q') = Q \end{aligned}$$





► 67 Eine isolierte, leitende Kugel der Gesamtladung Q und eine außerhalb ruhende Ladung q .



► 68 In das Volumen V eingebetteter Leiter L .

2.4.3 Greensche Funktion

Es sind gegeben

- 1.) Eine Ladungsverteilung ρ in V
- 2.) Die Randbedingung auf ∂V (außen und innen)

Betrachte die Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ mit

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Lösung:

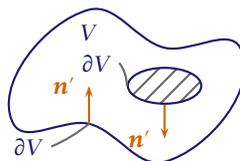
$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

mit $\nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ für alle $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \partial V \cup V$.

Bemerkung: 1.) L gehört nicht zu V .

2.) F wird zur Befriedigung der Randbedingung benötigt.

->



► 69 Illustration zum Greenschen Satz.

Zweite greensche Identität Seien $\phi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r})$ skalare Felder in V und sei \mathbf{n}' nach innen orientiert (vgl. Abb. 69).

$$\int_V [\phi(\mathbf{r}') \nabla'^2 \psi(\mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}') \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}')] dV' = - \int_{\partial V} [\phi(\mathbf{r}') \nabla' \psi(\mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}') \nabla' \phi(\mathbf{r}')] \cdot \mathbf{n}' df'$$

BEWEIS Gaußscher Satz:

$$\int_V \nabla' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}') dV' = - \int_{\partial V} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' df'$$

Sei nun

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \phi \nabla' \psi \\ \Rightarrow \nabla' \cdot \mathbf{A} &= (\nabla' \phi) \cdot (\nabla' \psi) + \phi \nabla'^2 \psi \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\int_V [(\nabla' \phi) \cdot (\nabla' \psi) + \phi \nabla'^2 \psi] dV' = - \int_{\partial V} \phi \nabla' \psi \cdot \mathbf{n}' df' \quad (2.5)$$

$$\int_V [(\nabla' \psi) \cdot (\nabla' \phi) + \psi \nabla'^2 \phi] dV' = - \int_{\partial V} \psi \nabla' \phi \cdot \mathbf{n}' df' \quad (2.6)$$

Subtrahieren wir (2.6) von (2.5) und, so erhalten wir die zweite Greensche Identität. ■

Wähle nun speziell:

- ▶ ϕ soll $\nabla^2 \phi = -4\pi \varrho$ liefern.
- ▶ $\psi(\mathbf{r}')$ soll $\nabla^2 \psi(\mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ liefern, d.h. $\psi(\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Einsetzen in den Greenschen Satz liefert:

$$\begin{aligned} &\int_V [\phi(\mathbf{r}') (-4\pi \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (-4\pi \varrho(\mathbf{r}')))] dV' \\ &= - \int_{\partial V} [\phi(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi(\mathbf{r}')] \cdot \mathbf{n}' df' \end{aligned}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \varrho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} [\phi(\mathbf{r}') \partial_{\mathbf{n}'} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \partial_{\mathbf{n}'} \phi(\mathbf{r}')] df'$$

Betrachten wir den letzten Ausdruck genauer:

$$\phi(\mathbf{r}) = \underbrace{\int_V \varrho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV'}_{\triangle \text{Raumladung}} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \underbrace{[\phi(\mathbf{r}') \partial_{\mathbf{n}'} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \partial_{\mathbf{n}'} \phi(\mathbf{r}')] dV'}_{\triangle \text{Dipolschicht}} \quad (2.7)$$

Oberflächenladung: \mathbf{n}' weist vom Leiter nach außen in V hinein.

$$\begin{aligned} -\partial_{\mathbf{n}'} \phi|_{\partial V} &= -4\pi \sigma \\ \partial_{\mathbf{n}'} &= \mathbf{n}' \cdot \nabla' \end{aligned}$$

Spezialfall: $\partial V \rightarrow \infty$ und $F \equiv 0$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{ und } \phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

falls $E(\mathbf{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ schneller als $1/r$.

Gleichung (2.7) gilt auch für ein unendliches V mit $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \int_V \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_{\partial V} \underbrace{\left[\frac{\mathbf{n}'}{4\pi} \phi(\mathbf{r}') \right]}_{=\Pi(\mathbf{r}')} \underbrace{\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{=-\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} df' \\ &\quad + \int_{\partial V} \left[\frac{1}{4\pi} \mathbf{n}' \cdot \underbrace{(-\nabla' \phi(\mathbf{r}'))}_{E(\mathbf{r}')} \right] \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} df' \end{aligned}$$

$\varrho(\mathbf{r}')$: Raumladungsdichte

$\frac{1}{4\pi} \mathbf{n}'(\mathbf{r}')E(\mathbf{r}') = \sigma(\mathbf{r}')$: Oberflächenladungsdichte

$\frac{\phi(\mathbf{r}')}{4\pi} \mathbf{n}'(\mathbf{r}') = \Pi(\mathbf{r}')$: Oberflächendipoldichte

Dipolpotential am Ort \mathbf{r} , wenn am Ort \mathbf{r}' ein Dipolmoment $\mathbf{p}(\mathbf{r}')$ vorhanden ist:

$$\phi_{\text{Dipol}} = -(\mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_r) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

hier $\mathbf{p}(\mathbf{r}') = \Pi(\mathbf{r}')$.

Speziell $\varrho(\mathbf{r}') = 0$ in V

$$\phi(\mathbf{r} \in V) = \int_{\partial V} \left[-\frac{\mathbf{n}'(\mathbf{r}')}{4\pi} \phi(\mathbf{r}') \right] \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} df' + \int_{\partial V} \frac{\mathbf{n}'(-\nabla' \phi(\mathbf{r}'))}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} df'$$

Dies ist eine Integralgleichung, die $\phi(\mathbf{r} \in V)$, sowie $\phi(\mathbf{r} \in \partial V)$ und $(\nabla \phi)(\mathbf{r} \in \partial V)$ verknüpft. Dies ist keine Lösung der Randwertaufgabe, da die gleichzeitige Vorgaben von ϕ und $\nabla \phi$ auf einer geschlossenen Oberfläche (\triangleq Cauchy-Randbedingung) eine Überspezifikation der Poisson-Differentialgleichung, eine elliptische Differentialgleichung, darstellt.

(Die Cauchy-Randbedingungen führen zu einer eindeutigen, stabilen Lösung der Wellengleichung, einer hyperbolischen Differentialgleichung)

Für geschlossenen Oberflächen lässt eine elliptische Differentialgleichung (Poisson-Differentialgleichung) zwei, sich ausschließende Randbedingungen zu:

- 1.) Dirichlet-Randbedingung: $\phi(\mathbf{r} \in \partial V)$ vorgegeben.
- 2.) Neumann-Randbedingung: $(\mathbf{n} \cdot \nabla \phi)(\mathbf{r} \in \partial V)$ vorgegeben.

Beide führen zu eindeutigen und stabilen Lösungen. Stabil heißt hier, dass kleine Änderungen der Randbedingung zu kleinen Änderungen der Lösung führen.

Die Freiheit der Wahl von $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ für G wird benutzt, um in (2.7) den bekannten Anteil im Oberflächenintegral zu eliminieren und damit (2.7) tatsächlich zu einer Bestimmungsgleichung für $\phi(\mathbf{r})$ zu machen.

Dirichlet: Hierbei sind $\phi(\mathbf{r}' \in \partial V)$ und F so vorgegeben, dass

$$\begin{aligned} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0, \quad \text{für alle } \mathbf{r}' \in \partial V \\ \phi(\mathbf{r}) &= \int_V dV' \varrho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\mathbf{r}') \partial_{\mathbf{n}'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') df' \end{aligned}$$

wobei $\varrho(\mathbf{r}')$ bekannt, $\phi(\mathbf{r}')$ vorgegeben und \mathbf{n}' ins Innere von V zeigt.

Neumann: Naheliegender wäre $\partial_{\mathbf{n}'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. Dies ist aber nicht zulässig, da

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_V \underbrace{\nabla' \cdot \nabla' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} dV'}_{=-4\pi} &= - \int_{\partial V} (\mathbf{n}' \cdot \nabla') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') df' \\ \Rightarrow \int_{\partial V} (\mathbf{n}' \cdot \nabla') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') df' &= 4\pi \end{aligned}$$

Die einfachste mögliche Wahl von $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ist somit:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}' \cdot \nabla') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{4\pi}{|\partial V|}, \quad \text{für } \mathbf{r}' \in \partial V \\ \phi(\mathbf{r}) &= \int_V dV' \varrho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{|\partial V|} \int_{\partial V} \phi(\mathbf{r}') df' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\mathbf{n}' \cdot \nabla') \phi(\mathbf{r}') df' \end{aligned}$$

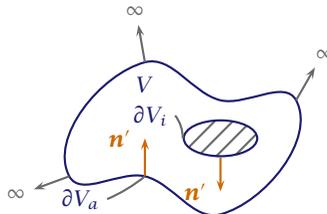
wobei $\varrho(\mathbf{r}')$ bekannt, $(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \phi(\mathbf{r}')$ vorgegeben und \mathbf{n}' ins Innere von V zeigt. Außerdem ist $\langle \phi \rangle_{\partial V}$ eine Konstante bezüglich \mathbf{r} im Potential mit

$$\langle \phi \rangle_{\partial V} = \frac{1}{|\partial V|} \int_{\partial V} \phi(\mathbf{r}') df'$$

Spezialfall: Äußeres Neumann-Problem

$$|\partial V| = |\partial V_i| + |\partial V_a| \rightarrow \infty, \quad \text{für } \partial V_a \rightarrow \infty$$

dann wird $\langle \phi \rangle_{\partial V} = 0$.



► 70 Zum äußeren Neumann-Problem

Bemerkung: Zur physikalischen Bedeutung von $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

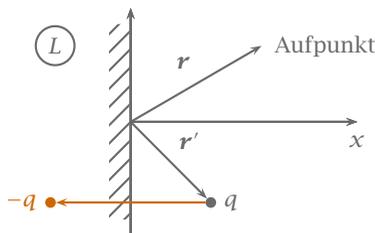
$$\nabla^2 F = 0 \text{ in } V \text{ und } G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ist das Potential am Ort \mathbf{r} einer außerhalb von V liegenden Ladungsverteilung, die so gewählt ist, dass deren Potential zusammen mit einer Punktladung der Ladung 1 am Ort \mathbf{r}' auf die Oberfläche ∂V die auferlegte Randbedingung sicherstellt. (Prinzip der Spiegelladung) →

► *Beispiel* für eine Dirichlet-Greensche Funktion im Halbraum V^+ .

$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$: Potential am Ort \mathbf{r} herrührend von einer Punktladung $q = 1$ am Ort $\mathbf{r}' \in V^+$ unter der Bedingung, dass dieses Potential am Rand ∂V^+ null ist.

$$G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0 \text{ für } x = 0$$



► 71 Lösung der Dirichlet-Greenschen Funktion.

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{-1}{\underbrace{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}' - 2\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{x}}))|}_{F_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})}}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - (\mathbf{r}' - 2\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{x}}))|^2 &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + 4((\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{x}}) + 4(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 \\ &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + 4(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{x}}) + 4(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{x}}) \\ &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + 4(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= F_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &\neq F_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

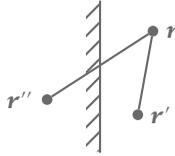
$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{x=0} = 0$$

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{x'=0} = 0$$

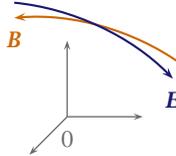
$$\nabla^2 F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad \text{für } x \geq 0$$



Bemerkung: Greensche Funktionen sind sehr nützlich, da sie bei einer vorgegebenen Geometrie und Randbedingung für beliebige $\varrho(\mathbf{r}')$ anwendbar sind. Die Lösung beschränkt sich damit nur noch auf ein Integrationsproblem. →



► 72 Führt man r und r' nahe zusammen, so explodiert der Nenner in $1/|r - r'|$. Ebenso erhalten wir eine Singularität, wenn wir den Punkt r' und den Spiegelpunkt zusammenführen.



► 73 E - und B -Feld außerhalb felderzeugender Wirbel und Quellen.

2.5 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit zeitabhängigen Feldern $E(\mathbf{r}, t)$ und $B(\mathbf{r}, t)$ außerhalb des Gebietes felderzeugender Quellen und Wirbel, vergleiche auch Abbildung 73.

Die Maxwell'schen Gleichungen lauten im Vakuum

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}$$

Auf die dritte dieser Gleichungen wenden wir die Rotation an

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E}$$

wir verwenden die Identität

$$\begin{aligned} [\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}]_\alpha &= [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})]_\alpha \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \varepsilon_{\gamma\mu\nu} \partial_\mu E_\nu \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\mu\nu} \partial_\beta \partial_\mu E_\nu \\ &= [\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}] \partial_\beta \partial_\mu E_\nu \\ &= \partial_\beta \partial_\alpha E_\beta - \partial_\beta \partial_\beta E_\alpha \\ &= \partial_\alpha \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 E_\alpha \\ &= \underbrace{[\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}]_\alpha}_{=0} = [-\nabla^2 \mathbf{E}]_\alpha \end{aligned}$$

Wendet man die Rotation auf die vierte Maxwell'sche Gleichung an, so erhält man

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B}$$

Wir erhalten also die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{E} &= 0 \\ \underbrace{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{B}}_{=0} &= 0 \end{aligned}$$

Jede kartesische Komponente von \mathbf{E} und \mathbf{B} erfüllt die Wellengleichung.

Bemerkung: Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom geht hier wesentlich ein. →

Wellengleichung: Die skalare Wellengleichung lautet

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) \psi = 0$$

hierbei ist $v = c$ und $\psi(\mathbf{r}, t) \in \{E_x, \dots, B_z\}$.

Zunächst betrachten wir die spezielle Lösung, anschließend die allgemeine Lösung durch Superposition. Die Wellengleichung ist eine lineare Differentialgleichung.

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Einsetzen in die Wellengleichung

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi_0 = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \pm ck$$

Dispersionsgesetz

Wir haben also das Dispersionsgesetz für elektromagnetische Wellen im Vakuum erhalten.

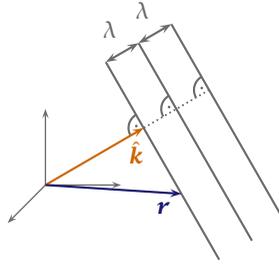
Monochromatische Wellen: Wenn $\psi(\mathbf{r}, t)$ eine Lösung der Wellengleichung ist, dann ist auch $\psi^*(\mathbf{r}, t)$ mit

$$\psi^*(\mathbf{r}, t) = \psi_0^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

eine Lösung.

Der feste Vektor \mathbf{k} ist nach Richtung und Betrag beliebig. Im Folgenden betrachten wir eine nach rechts laufende Welle, also

$$\omega = +c|\mathbf{k}|$$



► 74 Ebenen konstanter, gleicher Phase (periodisch im Raum, Momentaufnahme). Die Konstante der Phase ändert sich von Ebene zu Ebene um 2π . $e^{i\varphi}$ ist für alle Ebenen gleich.

Damit gelten einige Zusammenhänge

$$\mathbf{k} = k \cdot \hat{\mathbf{k}}$$

Wellenvektor, $k = |\mathbf{k}| > 0$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

λ hat die Rolle einer Wellenlänge

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Kreisfrequenz, T : Periode

$$v := \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Frequenz

Das Dispersionsgesetz lautet nun

$$\lambda = cT \quad \text{bzw.} \quad \frac{\lambda}{T} = c \quad \text{bzw.} \quad v\lambda = c$$

Die Amplitude der Welle ist komplex: $\psi_0 = |\psi_0|e^{i\varphi_0}$, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$.

$$\psi(\mathbf{r}, t) = |\psi_0|e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}, \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_0$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = 2\pi \left(\frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \varphi_0$$

$$\left. \begin{aligned} \psi(\mathbf{r} + n\lambda\hat{\mathbf{k}}, t) &= \psi(\mathbf{r}, t) \\ \psi(\mathbf{r}, t + nT) &= \psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \right\} \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Wähle nun t fest.

$$\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | \varphi(\mathbf{r}, t) = \text{const}\} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = \text{const}\}$$

Diese Punktmenge entspricht einer Ebene mit Normalenvektor $\hat{\mathbf{k}}$.

Nun gilt: t variiert, φ ist fest.

Frage: Wie muss sich ein Punkt $\mathbf{r}(t)$ im Raum bewegen, sodass sich die Phase an diesem Punkt nicht ändert? →

Antwort: Er muss sich so bewegen, dass die Projektion der Geschwindigkeit auf $\hat{\mathbf{k}}$ konstant und gleich c ist. Dazu

$$\varphi(t) := \varphi(\mathbf{r}(t), t) = \frac{2\pi}{\lambda} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}(t) - ct)$$

$$\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = c$$

Das heißt, dass c die Phasengeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum ist. \rightarrow

Bemerkung: Die komplexe Lösung $\psi(\mathbf{r}, t)$ steht für zwei lineare unabhängige reelle Lösungen:

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \psi(\mathbf{r}, t) = |\psi_0| \cos \varphi(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{Im} \psi(\mathbf{r}, t) = |\psi_0| \sin \varphi(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad \rightarrow$$

Die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} sind naturgemäß reell. Dazu gilt folgende Konvention.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\hat{\mathbf{E}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\hat{\mathbf{B}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right]$$

Bemerkung: \blacktriangleright Die orts- und zeitunabhängigen Amplitudenvektoren $\hat{\mathbf{E}}$ und $\hat{\mathbf{B}}$ sind im Allgemeinen komplex, d.h. sie haben komplexe Komponenten.

$$\blacktriangleright \omega = \pm c|\mathbf{k}| \Rightarrow \varphi(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{k}|(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp ct) + \varphi_0.$$

+ Die Welle läuft in Richtung $\hat{\mathbf{k}}$

- Die Welle läuft in Richtung $-\hat{\mathbf{k}}$ \rightarrow

Nicht jede Lösung der Wellengleichung ist auch eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen. Diese liefern zusätzliche Bedingungen.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$$

weil

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

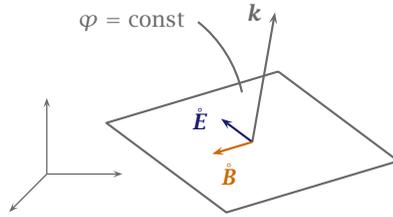
Daraus folgt insbesondere $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{B}} \perp \mathbf{k}$. Es handelt sich also um *transversale Wellen*.

Ferner:

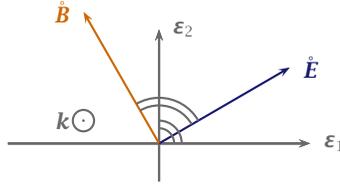
$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \\ \Rightarrow i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} &= i\frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{B}} \\ &= i|\mathbf{k}| \hat{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{B}}$	$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = \mathbf{B}$
$ \hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{B}} $	$ \mathbf{E} = \mathbf{B} $

$(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{B}})$ bilden ein Rechtssystem für Wellen, die sich in $\hat{\mathbf{k}}$ -Richtung ausbreiten.



► 75 $\text{grad}_r \varphi = \mathbf{k}$, d.h. dass \mathbf{k} Normalenvektor zur Ebene $\varphi = \text{const}$ ist.



► 76 Das Rechtssystem.

Betrachte Ebenen konstanter Phase, d.h. $\perp \mathbf{k}$.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \dot{E}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \dot{E}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j &= \delta_{ij} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{1,2} \cdot \mathbf{k} &= 0 \\ \dot{E}_{1,2} &= |\dot{E}_{1,2}| e^{i\alpha_{1,2}} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left[\left(|\dot{E}_1| \boldsymbol{\varepsilon}_1 e^{i\alpha_1} + |\dot{E}_2| \boldsymbol{\varepsilon}_2 e^{i\alpha_2} \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] \\ &= |\dot{E}_1| \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_1) + |\dot{E}_2| \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_2) \end{aligned}$$

Spezialfälle: Betrachte

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left[\boldsymbol{\varepsilon}_1 |\dot{E}_1| + \boldsymbol{\varepsilon}_2 |\dot{E}_2| \right] \cos(\underbrace{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha}_{\varphi(\mathbf{r}, t)})$$

$$|\mathbf{E}| = |\dot{\mathbf{E}}| |\cos \varphi| \neq \text{const}$$

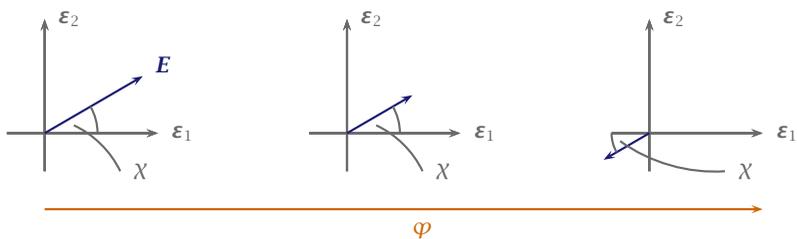
Die Richtung von \mathbf{E} ist konstant.

$$\dot{E}_{1,2} = |\dot{E}_{1,2}| e^{i\alpha_{1,2}}$$

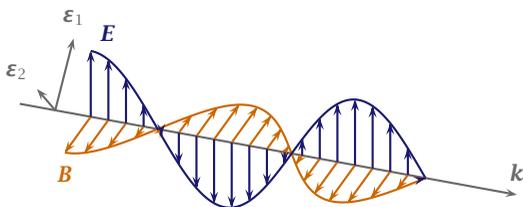
Für das dynamische elektrische Feld erhalten wir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = |\dot{E}_1| \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_1) + |\dot{E}_2| \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_2)$$

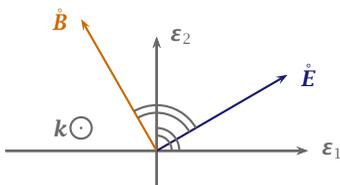
Wir erhalten mehrere Fälle.



► 77 Veränderung von E mit φ . Dabei gilt $\tan \chi = |\dot{E}_2|/|\dot{E}_1|$.



► 78 Eine linear polarisierte Welle. Zunahme von $\varphi(r, t)$ entweder durch t für festes r oder durch $r \cdot k$ für festes t .



► 79 Das magnetische Feld steht orthogonal zum elektrischen.

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$: Linear polarisierte Welle

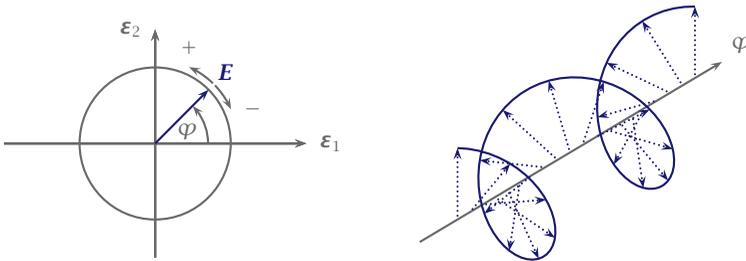
$\alpha_2 = \alpha \pm \pi/2$: zirkular polarisierte Welle

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = |\dot{\mathbf{E}}_1| \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_1) \mp |\dot{\mathbf{E}}_2| \boldsymbol{\varepsilon}_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha_1)$$

Falls zusätzlich $|\dot{\mathbf{E}}_1| = |\dot{\mathbf{E}}_2|$ erhalten wir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = |\dot{\mathbf{E}}_1| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \mp \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$|\mathbf{E}| = \text{const}$, aber die Richtung von \mathbf{E} ist nicht konstant.



► 80 Drehung der Polarisationsrichtung um die Ausbreitungsachse.

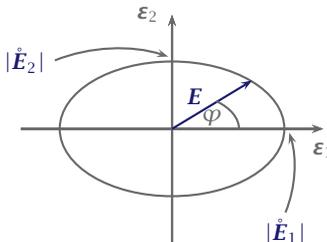
$\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi/2$ **und** $|\dot{\mathbf{E}}_1| \neq |\dot{\mathbf{E}}_2|$: elliptisch polarisierte Welle

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} |\dot{\mathbf{E}}_1| \cos \varphi \\ \mp |\dot{\mathbf{E}}_2| \sin \varphi \end{pmatrix}$$

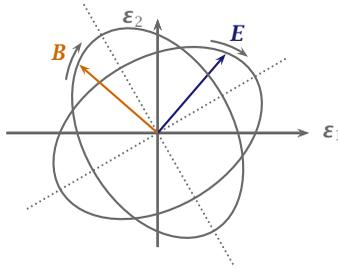
Der allgemeine Fall ist eine elliptische Polarisation, wie in Abbildung 82

Fazit: Es gibt einfache, zeitabhängige Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum und diese sind:

► monochromatische



► 81 Bei elliptisch polarisiertem Licht »eiert« die Polarisationsrichtung.



► 82 Trotz sich ändernder Polarisationsrichtung stehen E und B stets senkrecht aufeinander. Dabei gilt in dieser Zeichnung $|E| = |B|$, sowie $E \perp B$.

- ebene
- transversale
- elliptisch polarisierte

Wellen, die sich mit der Phasengeschwindigkeit c ausbreiten.

Experimentell zeigt sich: $c \approx 3\,000\,000\text{ km s}^{-1} = 3 \cdot 10^8\text{ m s}^{-1}$, Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

(d.h. Licht ist eine elektromagnetische Welle)

–

Energie einer elektromagnetischen Welle

$$u = \frac{1}{8\pi} [(\text{Re } \mathbf{E})^2 + (\text{Re } \mathbf{B})^2], \quad \text{Energiedichte} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Re } \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$$

dabei lauten die betrachteten Wellen

$$\mathbf{E} = \mathring{\mathbf{E}} e^{i\chi(\mathbf{r},t)}$$

$$\mathbf{B} = \mathring{\mathbf{B}} e^{i\chi(\mathbf{r},t)}$$

mit $\chi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$.

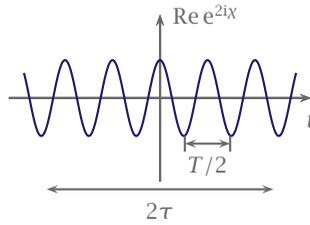
$$(\text{Re } \mathbf{E})^2 = \frac{1}{4} [\mathring{\mathbf{E}}^2 e^{2i\chi} + \mathring{\mathbf{E}}^{*2} e^{-2i\chi} + 2\mathring{\mathbf{E}}\mathring{\mathbf{E}}^*]$$

Für den zeitlichen Mittelwert erhalten wir

$$\langle u \rangle := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} u \, dt$$

Da hier $\tau \rightarrow \infty$ muss $\tau \gg T$ sein.

$$\frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} e^{\pm 2i\omega t} \, dt = \frac{\sin 2\omega\tau}{2\omega\tau} \rightarrow 0, \quad \text{für } \omega\tau = 2\pi \frac{\tau}{T} \rightarrow \infty$$



► 83 Illustration zum zeitlichen Mittelwert. Einige interessante Größen wurden beschriftet.

Damit folgt also

$$\langle u \rangle = \frac{1}{16\pi} (|\dot{\mathbf{E}}|^2 + |\dot{\mathbf{B}}|^2) = \frac{1}{8\pi} |\dot{\mathbf{E}}|^2$$

Diese Darstellung ist unabhängig von \mathbf{r} und t .

Poyntingvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} (\text{Re } \mathbf{E}) \times (\text{Re } \mathbf{B}) \\ &= \frac{c}{4\pi} (\text{Re } \mathbf{E}) \times (\hat{\mathbf{k}} \times \text{Re } \mathbf{E}) \\ &= \frac{c}{4\pi} \left\{ \hat{\mathbf{k}} ((\text{Re } \mathbf{E}) \cdot (\text{Re } \mathbf{E})) - (\text{Re } \mathbf{E}) \cdot ((\text{Re } \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{k}}) \right\} \\ &= \frac{c}{4\pi} (\text{Re } \mathbf{E})^2 \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Wir wissen

$$\langle (\text{Re } \mathbf{E})^2 \rangle = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{E}}|^2$$

Damit erhalten wir

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\dot{\mathbf{E}}|^2 \hat{\mathbf{k}} = \langle u \rangle c \hat{\mathbf{k}}$$

×

Damit lässt sich auch von der Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes der Mittelwert ermitteln

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{c^2} \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\langle u \rangle}{c} \hat{\mathbf{k}}$$

Allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\psi = \square\psi = 0$$

Aus der Superposition ebener, monochromatischer Wellen, d.h. einer Fouriertransformation ergibt sich

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) &= \int d^3r \psi(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Folglich erhalten wir im Fourierraum

$$\square\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(-k^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) \tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0$$

Daraus folgt insbesondere, dass der Integrand null sein muss, also

$$\left(-k^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) \tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) = 0$$

Es handelt sich nun um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t)$. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2}a(\mathbf{k})e^{-i\omega t} + \frac{1}{2}b(\mathbf{k})e^{i\omega t}$$

mit $\omega = \omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$.

Physikalische Felder:

$$\begin{aligned}\psi^*(\mathbf{r}, t) &= \psi(\mathbf{r}, t) \\ \Rightarrow \tilde{\psi}^*(\mathbf{k}, t) &= \tilde{\psi}(-\mathbf{k}, t) \\ \Rightarrow a^*(\mathbf{k})e^{i\omega t} + b^*(\mathbf{k})e^{-i\omega t} &= a(-\mathbf{k})e^{-i\omega t} + b(-\mathbf{k})e^{i\omega t} \\ \Rightarrow a^*(\mathbf{k}) &= b(-\mathbf{k}), \quad b^*(\mathbf{k}) = a(-\mathbf{k}) \\ \Rightarrow b(\mathbf{k}) &= a^*(-\mathbf{k})\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{2}a(\mathbf{k})e^{-i\omega(\mathbf{k})t} + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{2}a^*(-\mathbf{k})e^{i\omega(\mathbf{k})t} \right]$$

Integration nach $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ liefert für den zweiten Term zum Beispiel

$$\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{2}a^*(\mathbf{k})e^{i\omega(\mathbf{k})t}.$$

$$\boxed{\psi(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)}}$$

mit $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$. Dies ist die Überlagerung ebener Wellen.

Wir können $a(\mathbf{k}) \in \mathbb{C}$ aus Anfangsbedingungen ableiten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[a(\mathbf{k}) + a^*(-\mathbf{k})] &= \int d^3r \psi(\mathbf{r}, t=0) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ -\frac{i}{2}c|\mathbf{k}|[a(\mathbf{k}) - a^*(-\mathbf{k})] &= \int d^3r \partial_t \psi(\mathbf{r}, t=0) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen liefern $\text{Re } a(\mathbf{k})$ und $\text{Im } a(\mathbf{k})$. Eine kurze Herleitung folgt

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t=0) &= \text{Re} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} [a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} a^*(-\mathbf{k}) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}[a(\mathbf{k}) + a^*(-\mathbf{k})] &= \int d^3r \psi(\mathbf{r}, t=0) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \\ \partial_t \psi(\mathbf{r}, t=0) &= \text{Re} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} a(-\mathbf{k}) (-i\omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} [a(\mathbf{k}) (-i\omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a^*(\mathbf{k}) (i\omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} a(\mathbf{k}) (-i\omega) + \frac{1}{2} a^*(-\mathbf{k}) (i\omega) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{-ic|\mathbf{k}|}{2} [a(\mathbf{k}) + a^*(-\mathbf{k})] \\ \Rightarrow -\frac{i}{2}c|\mathbf{k}|[a(\mathbf{k}) - a^*(-\mathbf{k})] &= \int d^3r \partial_t \psi(\mathbf{r}, t=0) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Spezialfälle

► $a(\mathbf{k}) = a_0 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$

$$\Rightarrow \psi(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[a_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k}_0)t)} \right]$$

Es handelt sich um eine monochromatische, ebene Welle.

► Allgemeine ebene Welle (z.B. in x -Richtung) $a(\mathbf{k}) = A(k_x) (2\pi)^2 \delta(k_y) \delta(k_z)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \psi(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)} A(k) e^{i(kx - c|k|t)} \\ &= \text{Re} \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} A(k) e^{ik(x-ct)} + \text{Re} \int_{-\infty}^0 \frac{dk}{2\pi} A(k) e^{ik(x+ct)} \\ &= f(x-ct) + g(x+ct) \end{aligned}$$

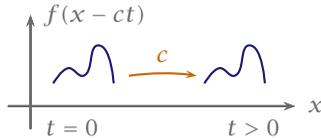
Hierbei sind f und g beliebige Funktionen ihrer Argumente.

► In beliebige Richtung gilt:

$$\boxed{\psi(\mathbf{r}, t) = f(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - ct) + g(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} + ct)}$$

Dabei ist f eine ebene Welle, die Richtung \mathbf{k} läuft, während g in Richtung $-\mathbf{k}$ läuft.

$f = \text{const} \Rightarrow \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = ct + \text{const}$ für $t = \text{const}$ eine Ebene mit Normalenvektor \mathbf{k} .



► 8.4 Mit der Zeit wird die Funktion $f(x - ct)$ mit der Geschwindigkeit c verschoben. Es handelt sich um eine starre Verschiebung.

Zusammenfassung: Elektromagnetische Wellen im Vakuum erfüllen die Wellengleichung

$$\square \mathbf{E} = 0 = \square \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)}$$

mit $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$.

$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}), \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) \in \mathbb{C}^3$ ist die komplexe Amplitude der Wellen. Phase und Polarisation stammen aus den Anfangsbedingungen.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{B} \implies \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) = 0 = \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \implies \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) \quad \rightarrow$$

2.6 Die elektromagnetischen Potentiale (Elektrodynamik als Eichfeldtheorie)

Aus der Statik ist bekannt, dass

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Ziele: ► Verallgemeinerung auf zeitabhängige Felder

- Lösung der »vollen« Maxwellischen Gleichungen mit vorgegebenen $\varrho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$.

Mit den homogenen Maxwellgleichungen erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} = 0 &\implies \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \\ \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \right\} \implies \text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \right) = 0 \implies \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} = -\nabla \phi$$

Fazit: Die homogenen Maxwellischen Gleichungen werden mit folgenden Ansätzen identisch erfüllt:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}$$

(2.8)

Die - hier noch relativ zueinander beliebigen - Potentiale $\phi(\mathbf{r}, t)$ und $A(\mathbf{r}, t)$ werden durch die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen in Verbindung mit einer *Eichtransformation* festgelegt.

Inhomogene Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho = -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{I})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{c}\partial_t \nabla \phi + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{A} \\ &= -\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\mathbf{A} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\partial_t \phi\right) \end{aligned} \quad (\text{IV})$$

Nun stellt sich die Frage, was ist die Divergenz von \mathbf{A} ? ($\nabla \cdot \mathbf{A}$)

Erste Wahl: Lorenzeichung

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\partial_t \phi = 0} \quad (2.9)$$

Unter dieser Eichung transformieren sich die Gleichungen (I) und (IV) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (\text{I}) &\Rightarrow \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\phi = -4\pi\rho \\ (\text{IV}) &\Rightarrow \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Diese inhomogenen Wellengleichungen sind mit (2.8) und mit (2.9) äquivalent zu den vollen Maxwell'schen Gleichungen, d.h. gesucht werden nur solche Lösungen der inhomogenen Wellengleichung (2.10), welche der (2.9) genügen.

Sei (ϕ, \mathbf{A}) eine auf diese Weise gefundene Lösung von (2.9) und (2.10).

Frage: Wie viele andere Potentiale (ϕ', \mathbf{A}') gibt es, die im Allgemeinen zwar nicht (2.9) und (2.10) lösen, aber die gleichen physikalischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} produzieren, wie (ϕ, \mathbf{A}) ? \rightarrow

Antwort: Es gibt unendlich viele solche Potentiale (ϕ', \mathbf{A}') und sie gehen aus (ϕ, \mathbf{A}) durch sogenannte *Eichtransformation* hervor. \rightarrow

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\Lambda \\ \phi' &= \phi - \frac{1}{c}\partial_t \Lambda \end{aligned}}$$

Dabei ist $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ ein beliebiges skalares Vektorfeld.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\Lambda) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \\ \mathbf{E}' &= -\nabla\phi' - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A}' = -\nabla\left[\phi - \frac{1}{c}\partial_t \Lambda\right] - \frac{1}{c}\partial_t [\mathbf{A} + \nabla\Lambda] \\ &= -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A} = \mathbf{E} \end{aligned}$$

Bemerkung: 1.) Zu jedem beliebigen Paar (ϕ', \mathbf{A}') lässt sich eine Eichtransformation finden, sodass das transformierte Paar (ϕ'', \mathbf{A}'') der Lorenzgleichung (2.9) genügt.

BEWEIS Seien (ϕ', \mathbf{A}') beliebig.

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \partial_t \phi' = \Gamma \neq 0 \quad \text{i.a.}$$

Forderung

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}'' + \frac{1}{c} \partial_t \phi'' &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla [\mathbf{A}' + \nabla \Lambda] + \frac{1}{c} \partial_t \left[\phi' - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \partial_t \phi'}_{\Gamma} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow \square \Lambda = -\Gamma \end{aligned}$$

Die Lösung dieser inhomogenen Wellengleichung liefert die gesuchte Eichtransformation. ■

2.) Es gibt unendlich viele Paare (ϕ'', \mathbf{A}'') , die der Lorenzgleichung (2.9) genügen. Sie gehen untereinander durch eingeschränkte Eichtransformation Λ_0 hervor, die der Wellengleichung $\square \Lambda_0 = 0$ genügen. Hierfür gibt es unendlich viele Lösungen.

Die inhomogenen Maxwellgleichungen ohne Einhlung lauten

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -4\pi \rho \quad (*)$$

$$\square \mathbf{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (**)$$

Eine Entkopplung findet durch die Lorenzgleichung $(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi = 0)$ oder durch die Coulombgleichung $(\nabla \cdot \mathbf{A} = 0)$ statt.

Sei (ϕ, \mathbf{A}) eine Lösung der gekoppelten Gleichungen, das der Lorenzgleichung nicht genügt, d.h.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi = \Gamma \neq 0$$

Jetzt wird eine Eichtransformation $(\phi, \mathbf{A}) \rightarrow (\phi', \mathbf{A}')$, sodass (ϕ', \mathbf{A}') die Lorenzgleichung erfüllt. $\square \Lambda = -\Gamma$ ist die Bestimmungsgleichung für diese Eichtransformation.

Aus

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda$$

folgt

$$\begin{aligned}
 -4\pi\rho &= \nabla^2\phi + \frac{1}{c}\partial_t\nabla\cdot\mathbf{A} \\
 &= \nabla^2\left(\phi' + \frac{1}{c}\partial_t\Lambda\right) + \frac{1}{c}\partial_t\nabla(\mathbf{A}' - \nabla\Lambda) \\
 &= \nabla^2\phi' + \frac{1}{c}\partial_t\nabla\cdot\mathbf{A}' + \frac{1}{c}\partial_t\nabla^2\Lambda - \frac{1}{c}\partial_t\nabla^2\Lambda \\
 &= \nabla^2\phi' + \frac{1}{c}\partial_t\nabla\cdot\mathbf{A}'
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} &= \square\mathbf{A} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi\right) \\
 &= \square[\mathbf{A}' - \nabla\Lambda] - \nabla\left(\nabla[\mathbf{A}' - \nabla\Lambda] + \frac{1}{c}\partial_t\left[\phi' + \frac{1}{c}\partial_t\Lambda\right]\right) \\
 &= \square\mathbf{A}' - \nabla\square\Lambda - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}' + \frac{1}{c}\partial_t\phi'\right) - \nabla\underbrace{\left(-\nabla^2\Lambda + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Lambda\right)}_{-\square\Lambda} \\
 &= \square\mathbf{A}' - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}' + \frac{1}{c}\partial_t\phi\right)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass (*) und (**) invariant sind unter Eichtransformation.

Jede Lösung von (*) und (**) kann durch eine geeignete Eichtransformation Λ ($\square\Lambda = -\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi$ im Falle der Lorenzeichung) auf eine Form gebracht werden, sodass sie die inhomogene Wellengleichung im Fall der Lorenzeichung (bzw. die entsprechenden Gleichungen im Fall der Coulombeichung, s.u.) erfüllt.

- 3.) Findet man Lösungen $(\tilde{\phi}, \tilde{\mathbf{A}})$ der inhomogenen Wellengleichung die der Lorenzeichung nicht genügen und unterwirft diese einer Eichtransformation Λ gemäß Punkt 1. um $(\hat{\phi}, \hat{\mathbf{A}})$ zu erhalten, so genügen letzere zwar der Lorenzeichung, sind aber keine Lösungen der inhomogenen Wellengleichung mehr, sondern entspricht einer Lösung zu

$$\begin{aligned}
 \square\hat{\phi} &= \square\tilde{\phi} - \frac{1}{c}\partial_t\square\Lambda = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\partial_t\square\Lambda \\
 \square\hat{\mathbf{A}} &= \square\tilde{\mathbf{A}} + \nabla\square\Lambda = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \nabla\square\Lambda
 \end{aligned} \tag{\#}$$

Da $(\tilde{\phi}, \tilde{\mathbf{A}})$ die Lorenzeichung nicht erfüllen und Λ gemäß (*), so bestimmt wurde, dass $(\hat{\phi}, \hat{\mathbf{A}})$ die Lorenzeichung erfüllen, muss $\square\Lambda = -\Gamma \neq 0$.

Andererseits zeigt (#), dass $(\tilde{\phi}, \tilde{\mathbf{A}})$ der Lorenzeichung genügen und die inhomogene Wellengleichung erfüllen und nur einer eingeschränkten Eichtransformation Λ_0 mit $\square\Lambda_0 = 0$ unterworfen werden, sodass die Lorenzeichung erhalten bleibt (siehe 2.), dann bleiben die transformierten Paare nach wie vor Lösungen der inhomogenen Wellengleichung.

Lösungen der inhomogenen Wellengleichung, die die Lorenzeichung nicht erfüllen (und damit keine Lösung von (*) und (**) sind) werden durch Umeichung (die zur Erfüllung der Lorenzeichung führt) noch keine Lösung von (*) und (**).

- 4.) Ein Vorteil der Lorenzgleichung ist, dass eine gleichartige Behandlung von ϕ und \mathbf{A} stattfindet (Dies lässt sich auch lorenzinvariant formulieren). -o

Zweite Wahl: Coulombgleichung

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = 0}$$

Auch in diesem zweiten Fall lässt sich jedes Paar (ϕ', \mathbf{A}') durch eine Eichtransformation in ein Paar (ϕ'', \mathbf{A}'') überführen, das der Coulombgleichung genügt:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}'' = \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) \implies \nabla^2 \Lambda = -\operatorname{div} \mathbf{A}$$

ist die Bestimmungsgleichung für die gesuchte Eichtransformation Λ .

$$\begin{aligned} \text{(I)} & \implies \boxed{\nabla^2 \phi = -4\pi \varrho} \\ \text{(IV)} & \implies \boxed{\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \nabla \partial_t \mathbf{j} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^\perp} \end{aligned}$$

Bedeutung von \mathbf{j}^\perp :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^\perp &= \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi} \nabla \partial_t \phi \\ \operatorname{div} \mathbf{j}^\perp &= \operatorname{div} \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi} \partial_t \nabla^2 \phi \\ &= \operatorname{div} \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi} \partial_t (-4\pi \varrho) \\ &= \operatorname{div} \mathbf{j} + \partial_t \varrho = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^\perp(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\mathbf{j}}^\perp(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ \operatorname{div} \mathbf{j}^\perp = 0 &\implies \tilde{\mathbf{j}}^\perp(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

daher »transversale« Stromdichte. Vorteil der Coulombgleichung ist, dass wenn $\varrho(\mathbf{r}, t)$ im ganzen \mathbb{R}^3 bekannt ist, dann gilt:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\varrho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (\text{gilt nur für die Coulombgleichung})$$

Lösung der inhomogenen Wellengleichung Wir lösen die inhomogene Wellengleichung für das Vektorpotential \mathbf{A} bzw. das skalare Potential ϕ . Dabei gilt

$$\square \psi(\mathbf{r}, t) = -4\pi f(\mathbf{r}, t)$$

wobei $f(\mathbf{r}, t)$ gegeben sei.

Wir betrachten Greens Funktion im \mathbb{R}^4 :

$$\boxed{\square G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')}$$

Mit der Kenntnis der Greenschen Funktion lautet die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_h(\mathbf{r}, t) + \int_{\mathbb{R}^4} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') f(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt'$$

wobei ψ_h die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung $\square \psi_h = 0$ ist.

Die Berechnung erfolgt durch Fouriertransformation. Seien dabei $\mathbf{r}' = 0, t' = 0$:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \\ \delta(\mathbf{r})\delta(t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} 1 \cdot e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \\ \Rightarrow \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) &= -4\pi \\ \Rightarrow \tilde{G} &= \frac{4\pi c^2}{c^2 k^2 - \omega^2} + \tilde{G}_h \end{aligned}$$

mit $\tilde{G}_h = \Gamma(\mathbf{k})\delta(\omega^2 - c^2 k^2)$, denn

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \Gamma(\mathbf{k})\delta(\omega^2 - c^2 k^2) = 0$$

Zur Erinnerung

$$\delta(g(\omega)) = \sum_i \frac{1}{|g'(\omega_i)|} \delta(\omega - \omega_i), \quad \omega_i : g(\omega_i) = 0 \text{ einfache Nullstellen}$$

Rücktransformation ergibt

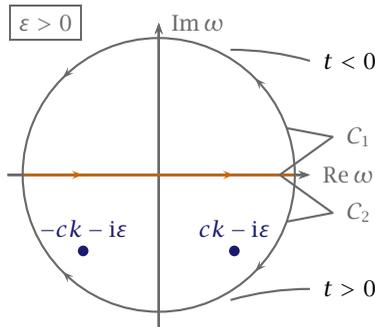
$$\begin{aligned} G_h(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Gamma(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{\delta((\omega - ck)(\omega + ck))}_{\frac{1}{2ck} \{\delta(\omega - ck) + \delta(\omega + ck)\}} e^{-i\omega t} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(\mathbf{k})}{4\pi ck} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - ckt)} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(\mathbf{k})}{4\pi ck} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + ckt)} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(\mathbf{k})}{4\pi ck} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - ckt)} + \left(\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma^*(-\mathbf{k})}{4\pi ck} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - ckt)} \right)^* \end{aligned}$$

wenn $\Gamma(\mathbf{k}) = \Gamma^*(-\mathbf{k})$

$$= 2 \operatorname{Re} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(\mathbf{k})}{4\pi ck} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - ckt)}$$

Als nächstes ist der inhomogene Anteil an der Reihe:

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \frac{2\pi c}{k} \left(\frac{1}{\omega + ck} - \frac{1}{\omega - ck} \right) \\ \tilde{G} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2\pi c}{k} \left[\frac{1}{\omega - (-ck - i\varepsilon)} - \frac{1}{\omega - (ck - i\varepsilon)} \right] \\ \hat{G}(\mathbf{k}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\omega t} \end{aligned}$$



► 85 Veranschaulichung der Integration in der komplexen Ebene.

Dabei gilt

$$-i\omega t = -i(\operatorname{Re} \omega + i \operatorname{Im} \omega) t = (\operatorname{Im} \omega) t - i(\operatorname{Re} \omega) t$$

$$|e^{-i\omega t}| = e^{(\operatorname{Im} \omega) t} \rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } (\operatorname{Im} \omega) t < 0$$

Das hei\u00dft: Bei $t > 0$ f\u00fcr $\operatorname{Im} \omega < 0$ und bei $t < 0$ f\u00fcr $\operatorname{Im} \omega > 0$, woraus folgt, dass f\u00fcr $t > 0$ der Integrationsweg nach unten und f\u00fcr $t < 0$ nach oben geschlossen werden kann.

$$\Rightarrow \hat{G}(k, t < 0) = \oint_{C_1} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t}$$

$$\hat{G}(k, t > 0) = \oint_{C_2} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t}$$

Residuensatz Eine in einem Gebiet $G \setminus \{z_0\}$ analytische Funktion l\u00e4sst sich in eine Laurent-Reihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint (\zeta - z_0)^{-n-1} f(\zeta) d\zeta$$

$$a_{-1} = \operatorname{Res} f(z)|_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint f(\zeta) d\zeta \quad \times$$

► **Beispiel** Sei $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, sodass φ und ψ analytisch in z_0 sind, wobei $\psi(z_0) = 0$ eine einfache Nullstelle sei.

$$\operatorname{Res} f(z_0)|_{z=z_0} = \operatorname{Res} \left[\frac{\varphi(z_0) + \varphi'(z_0)(z - z_0) + \dots}{\psi'(z_0)(z - z_0) + \dots} \right]_{z=z_0}$$

$$= \operatorname{Res} \left[\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \frac{1}{z - z_0} \right]_{z=z_0}$$

$$= \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Liegen mehrere Residuen vor, so wird darüber summiert

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res } f(z)|_{z=z_i}$$

wobei z_i alle singulären Punkte sind, die von C umschlossen werden. ◀

Für $\varepsilon > 0$ umschließt C_1 keine Polstelle, also ist $\hat{G}(\mathbf{k}, t < 0) = 0$.

$$\hat{G}(\mathbf{k}, t > 0) = -2\pi i \left\{ \text{Res} \left[\frac{1}{2\pi} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t} \right]_{\omega=-ck-i\varepsilon} + \text{Res} \left[\frac{1}{2\pi} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t} \right]_{\omega=ck-i\varepsilon} \right\}$$

Das Minuszeichen wurde eingeführt, um der Orientierung von C Rechnung zu tragen.

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[\frac{1}{2\pi} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t} \right]_{\omega=-ck-i\varepsilon} &= \frac{c}{k} e^{-i(-ck-i\varepsilon)t} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c}{k} e^{ickt} \\ \text{Res} \left[\frac{1}{2\pi} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t} \right]_{\omega=ck-i\varepsilon} &= -\frac{c}{k} e^{-i(ck-i\varepsilon)t} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{c}{k} e^{-ickt} \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{G}(\mathbf{k}, t > 0) &= -2\pi i \left\{ \frac{c}{k} e^{ickt} - \frac{c}{k} e^{-ickt} \right\} \\ &= -2\pi i \frac{c}{k} 2i \sin ckt \\ &= \frac{4\pi c}{k} \sin ckt \\ \hat{G}(\mathbf{k}, t) &= 4\pi c \frac{\sin ckt}{k} \Theta(t) \end{aligned}$$

mit der Heaviside-Funktion $\Theta(t)$ mit

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

Im Ortsraum

$$G(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \hat{G}(|\mathbf{k}|, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = G(|\mathbf{r}|, t)$$

wähle nun speziell $\mathbf{r} = (0, 0, r)$

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi c \Theta(t) \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin ckt}{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} \cos \theta} \\
 &= \frac{1}{\pi} c \Theta(t) \int_0^\infty dk k \sin ckt \underbrace{\int_{-1}^1 dx e^{ikrx}}_{2 \frac{\sin kr}{kr}} \\
 &= \frac{2c\Theta(t)}{\pi r} \int_0^\infty dk \sin(kr) \sin(ckt) \\
 &= \frac{c\Theta(t)}{\pi r} \int_{-\infty}^\infty dk \sin(kr) \sin(ckt) \\
 G(\mathbf{r}, t) &= \frac{c\Theta(t)}{2\pi r} \left\{ \int_{-\infty}^\infty dk [\cos(k(r-ct)) - \cos(k(r+ct))] \right. \\
 &\quad \left. + i \int_{-\infty}^\infty dk [\sin(k(r-ct)) - \sin(k(r+ct))] \right\} \\
 &= \frac{c\Theta(t)}{r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} [e^{ik(r-ct)} - e^{-ik(r+ct)}] \\
 &= \frac{c\Theta(t)}{r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} \{\delta(r-ct) - \delta(r+ct)\}
 \end{aligned}$$

da $\Theta(t)\delta(r+ct) = 0$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{c\Theta(t)}{r} \delta(r-ct) \\
 &= \frac{c\Theta(t)}{r} \delta\left((-c)\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \\
 &= \frac{\Theta(t)}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right)
 \end{aligned}$$

da $\delta(t - r/c) = 0$ für $t < 0$

$$= \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}$$

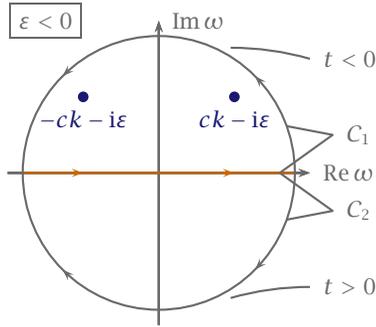
Schlussendlich bleibt also übrig

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\boxed{G_{\text{ret.}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{\delta\left(t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} - t\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}$$

Dies wird als *retardierte Greensche Funktion* bezeichnet. $G_{\text{ret.}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ ist eine vom Punkt \mathbf{r}' auslaufenden Kugelwelle, die zur Zeit t' losläuft.

- 1.) $t < t'$: Wert der Kugelwelle überall 0
- 2.) $t = t'$: unendlich großer Wert (»Blitz«) bei $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$
- 3.) $t > t'$: δ -artige Intensität bei $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = c(t - t')$



► 86 Illustration zur anderen Verschiebung der Pole um eine neue Greensche Funktion zu erhalten.

Die Fläche konstanter Intensität ist eine Kugelschale um \mathbf{r}' mit Radius $c(t - t') \rightarrow +\infty$, also einer Kugelwelle, die mit Lichtgeschwindigkeit ausläuft.

Es gibt noch eine weitere Greensche Funktion als Lösung.

$$\tilde{G} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{2\pi c}{k} \left[\frac{1}{\omega - (-ck - i\varepsilon)} - \frac{1}{\omega - (ck - i\varepsilon)} \right]$$

C_2 umschließt keine Pole, folglich $\hat{G}(\mathbf{k}, t > 0) = 0$.

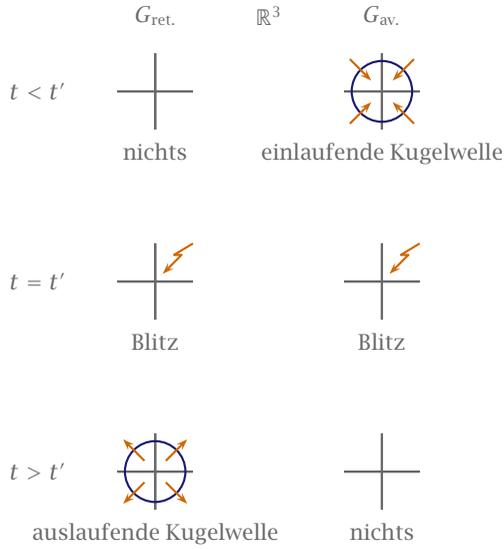
$$\hat{G}(\mathbf{k}, t < 0) = 2\pi i \left\{ \text{Res} \left[\frac{1}{2\pi} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t} \right]_{\omega = -ck - i\varepsilon} + \text{Res} \left[\frac{1}{2\pi} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t} \right]_{\omega = ck - i\varepsilon} \right\}$$

Durch analoge Rechnung zu oben erhalten wir

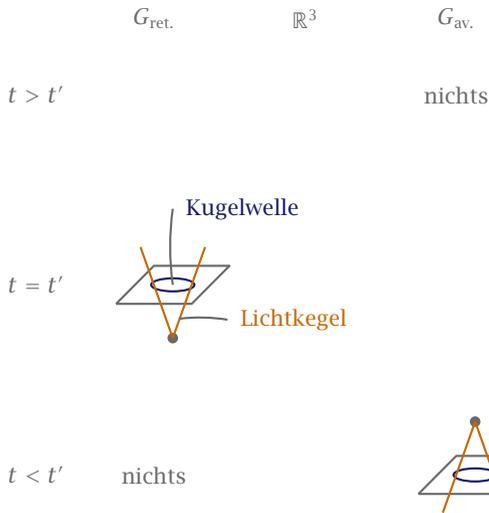
$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t) &= -\frac{c\Theta(t)}{r} \{ \delta(\mathbf{r} - ct) - \delta(\mathbf{r} + ct) \} \\ &= \frac{c\Theta(-t)}{r} \delta(\mathbf{r} + ct) \\ &= \frac{\delta\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} \end{aligned}$$

Wir erhalten die *avancierte Greensche Funktion*.

$$G_{\text{av.}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{\delta\left(t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} - t\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$



► 87 Vergleich von avancierter und retardierter Greenscher Funktion.



► 88 Veranschaulichung des Unterschiedes zwischen retardierter und avancierter Greenscher Funktion.

Probe: $G(\mathbf{r}, t) = \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) r^{-1}$

$$\begin{aligned}
 \square G &= \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right) \frac{\delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} \\
 &= \frac{1}{r} \nabla^2 \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) + \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) \nabla^2 \frac{1}{r} + 2\left(\nabla \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right)\right) \nabla \frac{1}{r} - \frac{1}{rc^2} \partial_t^2 \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) \\
 &= \frac{1}{r} \square \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) - 4\pi \delta(\mathbf{r}) \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial r} \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right)\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r}\right) \\
 &= -4\pi \delta(\mathbf{r}) \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} \underbrace{\left\{\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \hat{L}^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right\}}_{\nabla^2} \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) - \frac{2}{r^2} \partial_r \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) \\
 &= -4\pi \delta(\mathbf{r}) \delta(t) + \frac{1}{r} \underbrace{\left\{\partial_r^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right\}}_0 \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) + \frac{2}{r^2} \partial_r \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) \\
 &\quad - \frac{1}{r^3} \underbrace{\hat{L}^2}_0 \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) - \frac{2}{r^2} \partial_r \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right) \\
 &= -4\pi \delta(\mathbf{r}) \delta(t)
 \end{aligned}$$

Sowohl $G_{\text{ret.}}$ als auch $G_{\text{av.}}$ sind mathematisch zulässige Lösungen. Das bedeutet, dass die Maxwell'schen Gleichungen invariant sind unter Zeitumkehr. Die physikalische Lösung wird durch die **Ausstrahlungsbedingung** ausgewählt. Man nehme steht $G_{\text{ret.}}$, d.h. ein Blitz zur Zeit t' bei \mathbf{r}' hat stets eine auslaufende Kugelwelle zur Folge und ist nicht selbst das Produkt einer einlaufenden Kugelwelle.

Mit Hilfe der retardierten Greenschen Funktion lautet die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\begin{aligned}
 \psi(\mathbf{r}, t) &= \psi_h(\mathbf{r}, t) + \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') f(\mathbf{r}', t') \\
 &= \psi_h(\mathbf{r}, t) + \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t' - \left[t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right]\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} f(\mathbf{r}', t') \\
 &= \psi_h(\mathbf{r}, t) + \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \frac{[f(\mathbf{r}', t)]_{\text{ret.}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}
 \end{aligned}$$

dabei ist $\frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ die Zeit, die die elektromagnetische Strahlung benötigt, um von \mathbf{r}' nach \mathbf{r} zu gelangen-

Damit lauten die allgemeinen Lösungen für ϕ und \mathbf{A} in Lorenzgleichung:

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}, t) &= \phi_h(\mathbf{r}, t) + \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \frac{[\varrho(\mathbf{r}', t)]_{\text{ret.}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}_h(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)]_{\text{ret.}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}
 \end{aligned}$$

Dabei ist $[\varrho(\mathbf{r}', t)]_{\text{ret.}} = \varrho(\mathbf{r}', t_r)$ mit $t_r = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ (retardierte Zeit). Außerdem

$$\begin{vmatrix} \phi_h \\ \mathbf{A}_h \end{vmatrix}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \begin{vmatrix} \tilde{\phi}_h(\mathbf{k}) \\ \tilde{\mathbf{A}}_h(\mathbf{k}) \end{vmatrix} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt)}$$

Die obigen Ausdrücke sind als Lösungen der inhomogenen Wellengleichung nur dann die gesuchten Potentiale für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} , die die Maxwell'schen Gleichungen erfüllen, wenn sie der Lorenzbedingung genügen.

Homogener Anteil: $\operatorname{div} \mathbf{A}_h + \frac{1}{c} \partial_t \phi_h = 0$

$$0 = \operatorname{Re} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [\mathbf{i} k \tilde{\mathbf{A}}_h(\mathbf{k}) - \mathbf{i} k \tilde{\phi}_h(\mathbf{k})] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt)}$$

$$\boxed{\tilde{\phi}_h(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{A}}_h(\mathbf{k})}$$

muss gelten.

Inhomogener Anteil: $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^4} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt'$

► Für \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \nabla_r \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \int_{\mathbb{R}^4} (\nabla_r G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')) \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt' \\ &= - \int_{\mathbb{R}^4} (\nabla_{r'} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')) \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt' \\ &= - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^4} \nabla_{r'} \left(G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \right) d^3 r' dt'}_{= 0 \text{ gemäß Gauß und Lokalisierung von } \mathbf{j}} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^4} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{1}{c} \nabla_{r'} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt' \end{aligned}$$

► Für ϕ

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \partial_t \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^4} (\partial_t G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')) \varrho(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt' \\ &= - \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^4} (\partial_{t'} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')) \varrho(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt' \\ &= - \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dt' \partial_{t'} [G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \varrho(\mathbf{r}', t')]}_0 \\ &\quad + \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^4} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \partial_{t'} \varrho(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt' \end{aligned}$$

$\varrho(\mathbf{r}', t')$ ist lokalisiert, somit ist $|\mathbf{r}'|$ beschränkt. Also

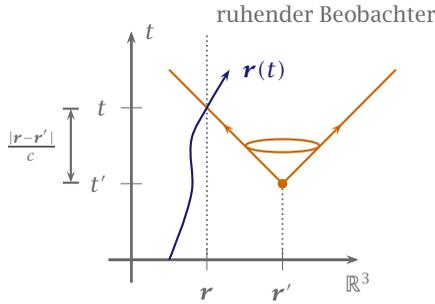
$$\lim_{t' \rightarrow \infty} \delta \left(t' + \underbrace{\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}}_{\text{beschränkt}} - t \right) \rightarrow \delta(\infty) = 0$$

$$\lim_{t' \rightarrow -\infty} \delta \left(t' + \underbrace{\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}}_{\text{beschränkt}} - t \right) \rightarrow \delta(-\infty) = 0$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \underbrace{[\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) + \partial_{t'} \rho(\mathbf{r}', t)]}_{= 0 \text{ wegen Kontinuitätsgleichung}} d^3 r' dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Lorenzbedingung ist also erfüllt.



► 89 $r(t)$ ist die Weltlinie eines bewegten Beobachters. Der Beobachter registriert zur Zeit t am Ort r ein Ereignis, das am Ort r' zur Zeit $t' = t - \frac{|r-r'|}{c}$ stattfand.

Die Eichinvarianz spielt auch bei der Lagrangeformulierung der Bewegungsgleichung in der Mechanik eine Rolle. Lagrangefunktion L eines geladenen Teilchens in äußeren elektromagnetischen Feldern: $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \phi(\mathbf{r}, t))$. Für $\mathbf{A} = \phi = 0$ wird L durch die Forderung nach Isotropie des Raumes und Homogenität von Raum und Zeit, sowie der Forderung entweder der Galileiinvarianz (bzw. Lorentzinvarianz) festgelegt.

Wenn nun $\mathbf{A} \neq 0$ und $\phi \neq 0$, erheben wir die Forderung nach Eichinvarianz der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}, \phi) = L\left(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A} + \nabla \Lambda, \phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda\right) + \frac{d}{dt} f$$

Behauptung:

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \frac{m}{2} v^2 \right\} - U_{\text{elmag}}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}, \phi) \\ U_{\text{elmag}} &= -\frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t) + q \phi(\mathbf{r}(t), t) \end{aligned}$$

Wendet man die Euler-Lagrange-Gleichung an, so erhält man die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\mathbf{r}} = q \mathbf{E} + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

→

Eichtransformation:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda$$

Unter dieser Transformation ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & L\left(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \phi - \frac{1}{c}\partial_t\Lambda\right) - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}, \phi) \\
 &= \frac{q}{c}\dot{\mathbf{r}}\nabla\Lambda(\mathbf{r}(t), t) + \frac{1}{c}\partial_t\Lambda(\mathbf{r}(t), t) \\
 &= \frac{d}{dt}\left[\frac{q}{c}\Lambda(\mathbf{r}, t)\right] \\
 &= \frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t), t) \\
 \Rightarrow & \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\Lambda(\mathbf{r}(t), t) dt \\
 &= \Lambda(\mathbf{r}(t_2), t_2) - \Lambda(\mathbf{r}(t_1), t_1)
 \end{aligned}$$

Liefert keinen Beitrag zu $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt$, bei der $\mathbf{r}(t_1)$ und $\mathbf{r}(t_2)$ festgehalten werden. Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind invariant.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$$

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{2}v^2 \\ -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{array} \right\} - U_{\text{elmag}}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}, \phi), \quad U_{\text{elmag}} = -\frac{q}{c}\dot{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t) + q \cdot \phi(\mathbf{r}(t), t)$$

Wir verwenden den kanonischen Impuls

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}\mathbf{A}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten hier

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

und liefert die Bewegungsgleichung gemäß der Lorentzkraft (klassisch).

$$m\dot{\mathbf{r}} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})\right)$$

Für die Hamiltonfunktion erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} &= \mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \\
 \dot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) \\
 H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), t) \\
 &= \mathbf{p} \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) - \frac{m}{2} \left(\frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) \right)^2 - \frac{1}{c} \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) \mathbf{A} + q\phi \\
 &= \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) - \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right)^2 - \frac{q}{cm} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) \mathbf{A} + q\phi \\
 &= \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right)^2 + \frac{q}{cm} \mathbf{A} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) - \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right)^2 - \frac{q}{cm} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) \mathbf{A} + q\phi \\
 \Rightarrow H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right]^2 + q\phi(\mathbf{r}, t)
 \end{aligned}$$

Mit den kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\
 \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}
 \end{aligned}$$

erhält man die Newtonschen Bewegungsgleichungen mit der Lorentzkraft.

Die Ladung bewirkt eine minimale Kopplung:

$$q = 0: \quad H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2$$

$q \neq 0$:

$$H = \frac{1}{2m} \underbrace{\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right)}_{m\dot{\mathbf{r}}}^2 + q\phi$$

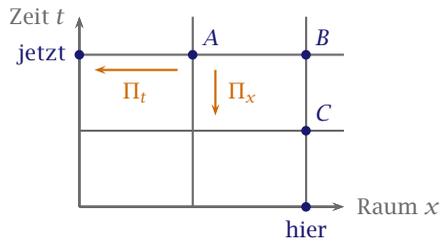
Für die Quantisierung führen wir den Übergang durch, bei dem die Hamiltonfunktion H zum Hamiltonoperator \hat{H} und der kanonische Impuls \mathbf{p} zum Impulsoperator $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ wird.

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t) = \frac{1}{2m} \left[-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + q\phi(\mathbf{r}, t)$$

3 Spezielle Relativitätstheorie

3.1 Der Raum-Zeit Begriff: Historische Evolution

Aristoteles Geht von der Situation eines ausgezeichneten Inertialsystems aus.

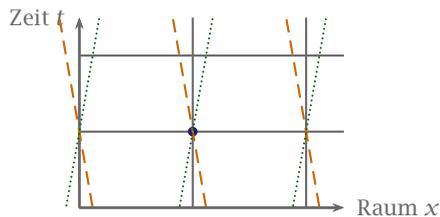


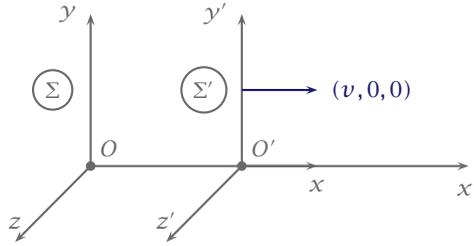
- ▶ A, B, C: Ereignisse
- ▶ A, B: gleichzeitig
- ▶ B, C: gleichortig

$$RZ = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \Pi_x, \Pi_t)$$

gleichzeitig und gleichortig sind die Projektionen auf die Zeit bzw. Raumachse.

Galilei, Newton Alle gleichförmig gegeneinander bewegten Bezugssysteme sind gleichberechtigte Inertialsysteme.

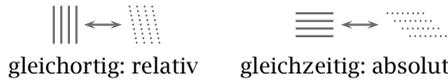




Galileitransformation

$$\begin{aligned}
 x' &= x - vt \\
 t' &= t \\
 t' &= -\frac{1}{v}x' + \frac{x}{v} \\
 t &= \frac{1}{v}x - \frac{x'}{v}
 \end{aligned}$$

Die Galileitransformation ist eine spezielle affine Abbildung von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, d.h. Geraden gehen in Geraden über.



$$\text{RZ} = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \cancel{\Pi_x}, \Pi_t)$$

Siehe später: Lorentz, Einstein: allgemeine, affine Abbildung, bei der gleichzeitig $\neq \Pi_t$ und damit ebenfalls relativ ist.

Elektrodynamik: Die Maxwellgleichungen sind nicht Galilei-invariant. Dieser Umstand würde durch die Annahme der *Ätherhypothese* gestützt, die ein Inertialsystem – das des ruhenden Äthers – auszeichnen würde (Der Äther würde das Fluidum bereitstellen, welches wie bei anderen Wellenausbreitungen (Schall, etc.) den als notwendig betrachteten Träger bereitstellen würde). Allerdings würde dies einen subtilen Rückfall in die Aristotelische Physik mit Π_x bedeuten: Nicht mehr die Erdscheibe, sondern der ruhende Äther wäre das bevorzugte Inertialsystem.

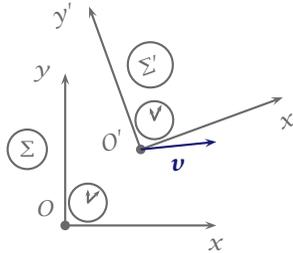
Experimenteller Befund: Äthernachweis erfolglos

- ▶ Aberration von Fixsternpositionen während eines Jahres
- ▶ Fizeaus Experiment bzgl. der Lichtgeschwindigkeit in bewegten Flüssigkeiten (1859)
- ▶ Michelson-Marley Experiment bzgl. der direkten Bewegung durch den Äther (1887)

In das Induktionsgesetz geht nur die Relativbewegung ein.



► 90 Leiterschleife im Magnetfeld. Die elektromotorische Kraft ist für beide Bewegungsrichtungen gleich groß.



► 91 Zwei Bezugssysteme Σ und Σ' sind Inertialsysteme

Einstein (1905): Das *Relativitätsprinzip* gilt allgemein.

- 1.) Existenz von Inertialsystemen: Kräftefreie Teilchen bewegen sich geradelinig-gleichförmig
- 2.) Ein gegenüber einem Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem ist ebenfalls ein Inertialsystem.
- 3.) Unter der Abbildung $\Lambda : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ sind Naturgesetze kovariant, d.h. in ihrer Form invariant unter der Abbildung Λ .

Schlussfolgerung: Wenn die Maxwell'schen Gleichungen kovariant unter Λ sein sollen, dann kann Λ keine Galilei-Transformation sein. \rightarrow

3.2 Lorentztransformation

Wir möchten nun die explizit Form von Λ finden. Wir fordern

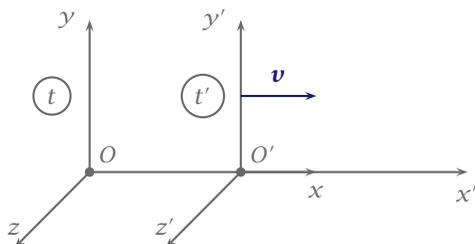
- 1.) Raum-Zeit Homogenität und Raum-Isotropie
- 2.) Gruppen-Eigenschaften ($\Lambda \in$ Gruppe); diese Gruppe enthält Raum-Zeit-Translationen, räumliche Drehungen und Spiegelung)

$$\Sigma \xrightarrow{\Lambda} \Sigma' \xrightarrow{\Lambda} \Sigma'' \quad \Sigma \xrightarrow[\mathbf{v}]{\Lambda^{-1}} \Sigma' \quad \Sigma \xrightarrow{\text{id}} \Sigma$$

$\Lambda'' = \Lambda \circ \Lambda'$

In Abbildung 92 sind einige Dinge zu beachten:

- $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ ist die Geschwindigkeit von O' (oder jedes anderen Punktes von Σ') bezüglich Σ .
- $x(t)$ ist die Bahnkurve eines festen Punktes $x' = \text{const}$ von Σ' bezüglich Σ .



► 92 Standardkonfiguration

- $x'(t')$ ist die Bahnkurve eines festen Punktes $x = \text{const}$ von Σ bezüglich Σ' .

Es muss gelten

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{x'=\text{const}} &= v = \text{const} \\ \left. \frac{dx'(t')}{dt'} \right|_{x=\text{const}} &= -v = \text{const} \end{aligned} \quad (\otimes)$$

außerdem

$$\begin{aligned} \Lambda : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}) &\rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}) \\ \Sigma &\rightarrow \Sigma' \\ (\mathbf{r}, t) &\rightarrow (\mathbf{r}', t') = \mathbf{r}'(\mathbf{r}, t), t'(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Aus der Raum-Zeit-Homogenität folgt ein linearer Zusammenhang. Es handelt sich also um eine affine Transformation.

Wir wissen $\Sigma \stackrel{\Lambda}{\rightarrow} \Sigma'$. Auf dieser Basis machen wir einen Ansatz $y' = y, z = z'$ (d.h. die Ebene $x = \text{const}$ wird wiederum auf eine - allerdings verschiedene - Ebene $x' = \text{const}$ abgebildet). Dieser führt zu dem Erfolg, dass wir einen linearen Ansatz für x' erhalten mit

$$x' = \gamma(v)x + b(v)t$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(v)x - v\gamma(v)t = \gamma(v)(x - vt) \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x'=\text{const}} &= v = -\frac{b(v)}{\gamma(v)} \end{aligned}$$

folglich

$$v \rightarrow 0 \Rightarrow \Lambda = \text{id} \Rightarrow \gamma(v \rightarrow 0) = 1$$

Dies spiegelt die Stetigkeit bei $v \rightarrow 0$ wider.

$$\Sigma' \xrightarrow{\Lambda^{-1}} \Sigma$$

Λ^{-1} soll aus Λ durch $v \rightarrow -v$ hervorgehen.

$$x = \gamma(-v)(x' + vt')$$

Bilde nun die Ableitung von x' nach t'

$$\left. \frac{dx'}{dt'} \right|_{x=\text{const}} = -v$$

Dies erfüllt offensichtlich (⊗)

$$\begin{aligned} x &= \gamma(v)\gamma(-v)x - \gamma(v)\dot{\gamma}(-v)vt + \gamma(-v)vt' \\ t' &= \gamma(v) \left[t - \frac{\gamma(v)\gamma(-v) - 1}{\gamma(v)\gamma(-v)} \frac{x}{v} \right] \\ x' &= \gamma(v)[x - vt] \end{aligned}$$

$\gamma(v)$ ist dimensionslos; wenn es von v abhängt, muss es zusätzlich parametrisch von einer weiteren, festen Geschwindigkeit V_0 abhängen: $\gamma = \gamma(v/V_0)$. Im Limes $v/V_0 \rightarrow 0$ soll die Galileitransformation wieder entstehen: $\gamma(v/V_0) = 1 + \mathcal{O}((v/V_0)^2)$

Annahme: γ ist überhaupt vom Vorzeichen von v unabhängig.

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left[t - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{x}{v} \right] \\ x' &= \gamma[x - vt] \end{aligned}$$

→

Definition

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^2(v/V_0) - 1}{\gamma^2(v/V_0)} &= \frac{v^2}{V_0^2 f\left(\frac{v}{V_0}\right)} \\ V_0^2 f\left(\frac{v}{V_0}\right) &= V^2, \quad V^2 > 0 \iff \gamma > 1 \end{aligned}$$

⊗

Damit ergibt sich für die Standardkonfiguration

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma[x - vt] \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma \left[t - \frac{v}{V^2} x \right] \end{aligned}} \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/V)^2}}$$

Nun werden die Eigenschaften von $V^2 = V_0^2 f(v/V_0)$ aus den Gruppeneigenschaften von Λ bestimmt.

$$(x, t) \xrightarrow{v} (x', t') \xrightarrow{v'} (x'', t'')$$

\curvearrowright
 $v''(v, v')$

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma'(x' - v't') \\ t'' &= \gamma' \left(t - \frac{v'}{V'^2} x' \right) \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma' = \left[1 - \left(\frac{v'}{V'} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$v'^2 = V_0^2 f \left(\frac{v'}{V_0} \right)$$

Jetzt Einsetzen von x' und t' :

$$x'' = \gamma' \left[\gamma(x - vt) - v' \gamma \left(t - \frac{v}{V^2} x \right) \right] = \gamma \gamma' \left[\left(1 + \frac{v v'}{V^2} \right) x - (v + v') t \right]$$

$$x'' = \gamma \gamma' \left(1 + \frac{v v'}{V^2} \right) \left[x - \frac{v + v'}{1 + \frac{v v'}{V^2}} t \right] \stackrel{!}{=} \gamma'' [x - v'' t] \quad (3.1)$$

Nun wollen wir t'' bestimmen.

$$t'' = \gamma' \left[\gamma \left(t - \frac{v}{V^2} x \right) - \frac{v'}{V'^2} \gamma (x - vt) \right]$$

$$= \gamma \gamma' \left[\left(1 + \frac{v v'}{V'^2} \right) t - \left(\frac{v}{V^2} + \frac{v'}{V'^2} \right) x \right]$$

$$t'' = \gamma \gamma' \left(1 + \frac{v v'}{V'^2} \right) \left[t - \frac{\frac{v}{V^2} + \frac{v'}{V'^2}}{1 + \frac{v v'}{V'^2}} x \right] \stackrel{!}{=} \gamma'' \left[t - \frac{v''}{V''^2} x \right] \quad (3.2)$$

wobei

$$\gamma'' = \left[1 - \frac{v''^2}{V_0^2 f \left(\frac{v''}{V_0} \right)} \right]^{-1/2}$$

(3.1) und (3.2) gelten für alle x, t . Speziell:

$$(3.1)|_{t=0} \Rightarrow \gamma \gamma' \left(1 + \frac{v v'}{V^2} \right) = \gamma'' \quad (3.3)$$

$$(3.2)|_{x=0} \Rightarrow \gamma \gamma' \left(1 + \frac{v v'}{V'^2} \right) = \gamma'' \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow V^2 = V'^2$$

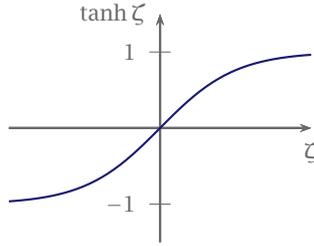
Mit (3.1) und (3.3) gilt

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{v v'}{V^2}}$$

Dies ist das *Additionstheorem der Geschwindigkeiten* (hier speziell: $\mathbf{v} \parallel \mathbf{v}' \parallel \mathbf{v}''$).

$$(3.2) \text{ und } (3.4) \Rightarrow \frac{\frac{v}{V^2} + \frac{v'}{V'^2}}{1 + \frac{v v'}{V'^2}} = \frac{v''}{V''^2} = \frac{\frac{v}{V'^2} + \frac{v'}{V''^2}}{1 + \frac{v v'}{V^2}}$$

$$\stackrel{V^2=V'^2}{\Rightarrow} V^2 = V'^2 = V''^2$$



► 93 Tangens hyperbolicus

d.h.

$$f\left(\frac{v}{V_0}\right) = f\left(\frac{v'}{V_0}\right) = f\left(\frac{v''}{V_0}\right) \Rightarrow f = \text{const}$$

Wähle nun o.B.d.A. $f = 1$. Daraus folgt, dass $V^2 = V_0^2$ eine invariante Geschwindigkeit ist.

Zur Bedeutung von V_0 :

$$1.) \quad \begin{aligned} V_0^2 = \infty &\Rightarrow \Lambda : \text{Galileitransformation} \\ V_0^2 = 0 &\Rightarrow y = i \cdot 0 : \text{unphysikalisch, da } x', t' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$2.) \quad t' = \gamma \left(t - \frac{v}{V_0^2} x \right)$$

speziell $x = 0 \Rightarrow t' = \gamma t$

1.) Wäre $\gamma < 1$, so würde Λ von der Gegenwart t in Σ in die Vergangenheit $t' < t$ in Σ' transformieren. Wegen $(\gamma^2 - 1)/\gamma^2 = v^2/V^2 = v^2/V_0^2$ bedeutet dies, dass $V_0^2 > 0$ sicherstellt, dass Zukunft und Vergangenheit nicht vertauscht werden kann.

2.) Wäre $V_0^2 < 0$, sowie $v'' = \infty$ für $v v' = -V_0^2$ (siehe Additionstheorem) unphysikalisch.

3.) Seien $|\frac{v}{V_0}| < 1$ und $|\frac{v'}{V_0}| < 1$.

$$\exists \zeta, \zeta' \in \mathbb{R} : \frac{v}{V_0} = \tanh \zeta, \frac{v'}{V_0} = \tanh \zeta'$$

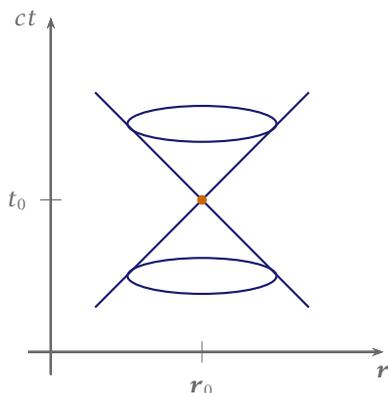
$$\Rightarrow \frac{\tanh \zeta + \tanh \zeta'}{1 + (\tanh \zeta)(\tanh \zeta')} = \tanh(\zeta + \zeta')$$

$$\Rightarrow \left| \frac{v''}{V_0} \right| < 1$$

Durch Addition von Geschwindigkeiten kann V_0 nicht überschritten werden. Das bedeutet: V_0 ist eine Grenzggeschwindigkeit.

$$V_0'' = \frac{V_0 + V_0'}{1 + \frac{v_0 v_0'}{V_0^2}} \stackrel{v_0=v_0'}{=} \frac{2V_0}{2} = V_0$$

Die Grenzggeschwindigkeit bleibt unter Λ invariant.



► 94 Lichtkegel = $\{\{\mathbf{r}, t\} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mid |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = c|t - t_0|\}$

- 4.) $V_0 = ?$: Physikalisches Problem. V_0 muss groß gegenüber »normalen« Geschwindigkeiten sein, da die Galilei-Kovarianz der Mechanik eine gute Näherung darstellt.

Michelson-Morley Experiment: Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.

Einstein postuliert daher: Lichtkegel bleibt unter Λ invariant. Diese Punktmenge des Lichtkegels soll unter Λ auf sich selbst abgebildet werden.

$$\begin{aligned} \Lambda : t &\rightarrow t', \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' \\ t_0 &\rightarrow t'_0, \mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}'_0 \end{aligned}$$

so, dass $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0| = c|t' - t'_0|$, d.h.

$$c^2(t - t_0)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 = 0 \iff c^2(t' - t'_0)^2 - (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)^2 = 0$$

Dies wird von Λ geleistet, genau dann, wenn $V_0 = c$ mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c .

Allgemein: Invarianz von $c^2(t - t_0)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2$, d.h. es soll gelten

$$\begin{aligned} c^2(t - t_0)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 &= c^2(t' - t'_0)^2 - (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)^2 \\ \iff c^2 \gamma^2 \left[t - \frac{v}{c^2} x - t_0 + \frac{v}{c^2} x_0 \right]^2 - \gamma^2 [x - x_0 - v(t - t_0)]^2 \\ &\quad - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 \\ c^2 \gamma^2 \left[(t - t_0) - \frac{v}{c^2} (x - x_0) \right]^2 - \gamma^2 [(x - x_0) - v(t - t_0)]^2 &= c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 \\ \iff c^2 \gamma^2 (t - t_0)^2 - 2v \gamma^2 (t - t_0)(x - x_0) + \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 (x - x_0)^2 - \gamma^2 (x - x_0)^2 \\ &\quad + 2v \gamma^2 (x - x_0)(t - t_0) - \gamma^2 v^2 (t - t_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 = 0 \\ c^2(t - t_0)^2 \left\{ \gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} - 1 \right\} - (x - x_0) \left\{ -\frac{v^2}{c^2} \gamma^2 + \gamma^2 - 1 \right\} &= 0 \\ \left\{ \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - 1 \right\} \underbrace{\{c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2\}}_{\text{beliebig}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{V_0^2}} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow V_0 = c$$

Zusammenfassung: Haben wir eine Lorentztransformation von einem Inertialsystem (IS) in ein gestrichenes Inertialsystem (IS') in Standardkonfiguration (Λ_{SK})

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = \gamma[x - vt] \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left[t - \frac{v}{c^2}x\right] \end{array}} \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Die allgemeine Poincaré-Transformation IS \rightarrow IS' setzt sich aus Λ_{SK} , Raum-Zeit-Translation, Raum-Zeit Spiegelung und Raumdrehungen zusammen.

$$\frac{v}{c} \ll 1 : \Lambda \rightarrow \Lambda_{\text{Galilei}} \quad \rightarrow$$

Alternative zum Postulat $V_0 = c$ V_0 kann aus dem Experiment (z.B. aus dem Zerfall von Pionen) erschlossen werden. Die Transformationsformel zusammen mit $V = V_0$ prognostiziert eine Zeitdilatation (siehe später), die von V_0 abhängt. Die Messung dieser Dilatation liefert umgekehrt V_0 mit dem Wert $\approx 300\,000 \text{ km s}^{-1}$, innerhalb der Messgenauigkeit.

Bemerkung:

$$V_0 = c \Leftrightarrow m_{\text{photon}} = 0$$

Dass $V_0 = c$ hat zur Folge, dass die Ruhemasse des Photons verschwindet.

Aber auch wenn $m_{\text{photon}} > 0$ wäre, würde das dem Einsteinschen Relativitätsprinzip nicht schaden. Allerdings wäre dann die Maxwell'sche Elektrodynamik nicht mehr streng lorentz-invariant und müsste - wie die Mechanik - korrigiert werden. \rightarrow

3.3 Raumzeitgeometrie

In Abbildung 95 ist sichtbar, dass

$$x = vt \Leftrightarrow ct = \frac{c}{v}x$$

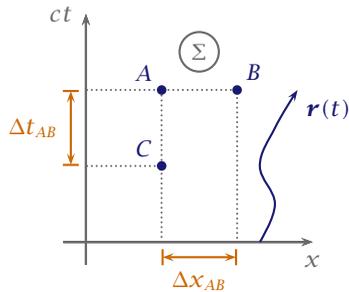
Wählen wir die Ereignisse A und B , dann

$$\Delta x_{AB} \neq 0, \quad \Delta t_{AB} = 0$$

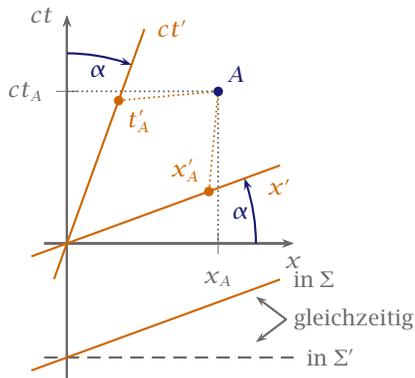
bedeutet Gleichzeitigkeit in Σ . In einem System Σ' sieht das anders aus

$$\Delta t'_{AB} = \gamma \left(\Delta t_{AB} - \frac{v}{c} \Delta x_{AB} \right) \neq 0$$

Das heißt: Die Gleichzeitigkeit zweier *räumlich getrennter* Ereignisse ist kein bewegungsinvarianter Begriff - *Relativität der Gleichzeitigkeit*.



- 95 A, B, C sind Ereignisse. Die Weltlinie $r(t)$ hat stets eine Steigung größer als 1, d.h. $|v| < c$



- 96 ct' sind die Punkte (x, c, t) in Σ , die $x' = 0$ entsprechen; das sind diejenigen mit $ct = c/v x$. x'_A sind die Punkte (x, c, t) in Σ , die $t' = 0$ entsprechen; das sind diejenigen mit $ct = v/c x$.

Wie sieht das Bild der Bewegung unter der Transformation aus? Für die t' -Achse (= Weltlinie von O') gilt

$$x' = 0 \Rightarrow ct_{O'} = \frac{c}{v} x_{O'}$$

Dies ist die Form einer Gerade mit Steigung $c/v > 1$. Für die x' -Achse folgt:

$$t' = 0 \Rightarrow ct_{x'} = \frac{v}{c} x_{x'}$$

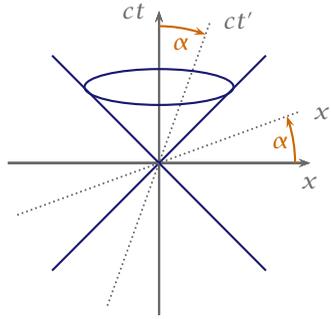
Hier erhalten wir eine Gerade der Steigung $v/c < 1$.

$$ct'_A = \gamma \left(ct_A - \frac{v}{c} x_A \right)$$

$$x'_A = \gamma \left(x_A - \frac{v}{c} ct_A \right)$$

Nun sind die Gleichzeitigkeit und die Gleichortigkeit nicht mehr nur einfach die Projektionen auf die x - oder t -Achse, sondern hängt vom Bezugssystem ab.

$$\tan \alpha = \frac{v}{c}, \quad \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{c}{v}$$



► 97 Die den Lichtkegel aufspannenden Geraden sind gegeben durch $ct = x \equiv ct' = x'$ und $ct = -x$.

Im Grenzfall $v \rightarrow c$ wird $\alpha = 45^\circ$.

Die Koordinatendifferenzen zweier Ereignisse A und B sind

$$\text{in } \Sigma : \Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$$

$$\text{in } \Sigma' : \Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t'$$

Damit ergibt sich der Zusammenhang

$$\Delta x' = \gamma[\Delta x - v \Delta t]$$

$$\Delta y' = y$$

$$\Delta z' = z$$

$$\Delta t' = \gamma \left[\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right]$$

Mit dieser Lorentztransformation erhält man

$$\begin{aligned} S_{AB}^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 \\ &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2 \end{aligned}$$

dies gilt insbesondere für den Lichtkegel $S^2 = 0$. Das heißt: Die Größe S_{AB}^2 ist eine lorentzinvariante Größe. S_{AB}^2 wird als Raum-Zeit-Abstand oder Intervall von AB bezeichnet.

Lichtkegel

$$S^2 = 0 = (\Delta \mathbf{r})^2 - c^2(\Delta t)^2$$

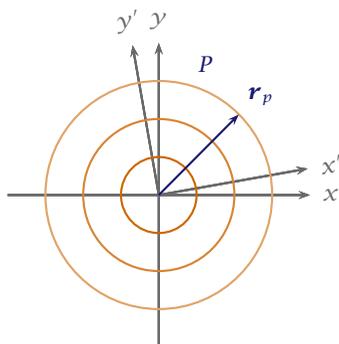
Der invariante Lichtkegel definiert eine Raum-Zeit-Metrik (Minkowskimetrik).

Vergleich

Euklidischer Raum: (Abbildung 98)

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = r_p^2 = |\mathbf{r}_p|^2$$

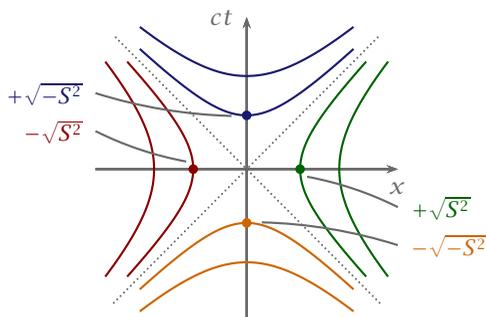
invariant bei räumlichen Drehungen $D^{-1} = D^\top$.



► 98 Euklidische Metrik

Minkowskimetrik: (Abbildung 99) Flächen konstanten Abstandes aus $S^2 = \text{const}$ sind hyperbolische Flächen.

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = S^2 = \text{const} \Rightarrow \frac{x^2}{S^2} + \frac{y^2}{S^2} + \frac{z^2}{S^2} - \frac{c^2 t^2}{S^2} = 1$$

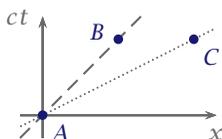


► 99 Minkowskimetrik

\overline{OP} , \overline{OQ} , \overline{OR} sind gleichlang im Sinne der Minkoskimetrik (\neq euklidischer Metrik)

Für die Abstände gilt: $S^2 > 0$ raumartig, $S^2 = 0$ lichtartig, $S^2 < 0$ zeitarbeitig.

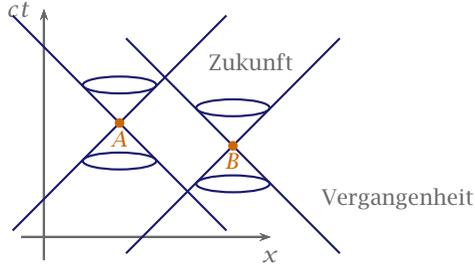
c ist die Grenzgeschwindigkeit, also hat die Weltlinie stets eine Steigung größer 1. Haben zwei Ereignisse A und B einen zeitarbeitigen Abstand, so lässt sich stets eine Weltlinie durchlegen, was bedeutet, dass die Ereignisse für ein und denselben materiellen Punkt zeitlich nacheinander eintreten können, d.h. es gibt ein Bezugssystem, in welchem sie am gleichen Ort nacheinander eintreten.



► 100 Illustration raumartiger Ereignisse.

Sind zwei Ereignisse A und C raumartig, so gibt es stets ein Bezugssystem, in dem sie gleichzeitig an verschiedenen Orten stattfinden.

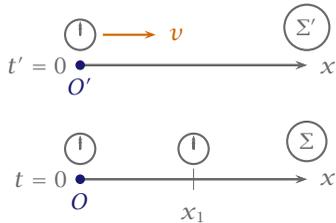
Bemerkung: In der Galilei-Newton-Welt hat der Begriff des Raum-Zeit-Abstandes keine physikalische Bedeutung. Es gibt dort nur einen absoluten, d.h. galileiinvarianten, zeitlichen Abstand. \rightarrow



► 101 Kausale Struktur der Welt

A und B haben nur im Überlappungsbereich ihrer Lichtkegel eine mögliche gemeinsame Vergangenheit bzw. Zukunft.

Zeitdilatation Vergleich von relativ zueinander bewegten gleichen Uhren. Die Uhr bei x_1



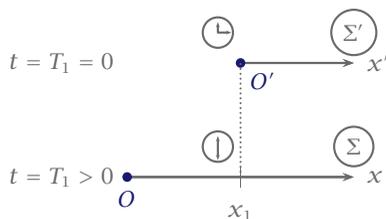
► 102 Zeitdilatation

muss mit der in O dadurch synchronisiert werden, dass sie von O nach x_1 gebracht wurde, dass von O ein Lichtstrahl nach x_1 gesendet wurde und bei dessen Eintreffen auf die Zeit x_1/c gestellt wurde. (Nicht zulässig: Uhren bei O synchronisieren und dann nach x_1 bringen, da die Uhren beim Transport anders gehen könnten.)

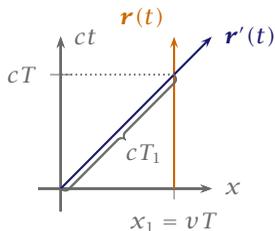
Es zeigt sich

$$ct_{O'} = \frac{c}{v} x_{O'}$$

$$ct_{O'}(x_{O'} = x_1) = \frac{c}{v} v T = c T \text{ in } \Sigma$$



► 103 Zeitdilatation



► 104 Schnitt der Weltlinie $r(t)$ von x_1 in Σ und der Weltlinie $r'(t)$ der in O' befindlichen bewegten Uhr $x' = 0$ in Σ .

Mit der Lorentztransformation ergibt sich

$$\begin{aligned}
 T &= \gamma \left(T_1 + \frac{v}{c^2} x'_{O'} \right) \\
 T &= \frac{T_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Minkowskimetrik:

$$\begin{aligned}
 S^2 &= x_1^2 - c^2 T^2 = v^2 T^2 - c^2 T^2 = (v^2 - c^2) T^2 \\
 &= c^2 \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) T^2 = c^2 \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) \frac{T_1^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -c^2 T_1^2
 \end{aligned}$$

Euklidische Metrik (Pythagoras):

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + c^2 T^2 &= v^2 T^2 + c^2 T^2 = (v^2 + c^2) T^2 \\
 &= \frac{v^2 + c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} T_1^2 = c^2 \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} T_1^2
 \end{aligned}$$

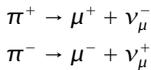
Beachte: Hier gilt nicht der Pythagorassatz der euklidischen Metrik. Nach Pythagoras müsste gelten $cT < cT_1$, statt (3.5). →

Anders ausgedrückt: RZ-Abständen konstant: neuer Bezeichnung: $T_1 \equiv T_0$

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2 &= (\Delta x')^2 - c^2(\Delta t')^2 \\ v^2 T^2 - c^2 T^2 &= 0 - c^2 T_0^2 \\ \Rightarrow (v^2 - c^2) T^2 &= -c^2 T_0^2 \\ \Rightarrow T^2 &= \frac{T_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\end{aligned}$$

Fazit: Bewegte Uhren gehen langsamer als ruhende Uhren. \rightarrow

► **Beispiel** Der Zerfall von Pionen als experimentelles Beispiel. Es gibt zwei Arten von Pionen π^+ und π^- . Für den Zerfall gilt



Die Halbwertszeit eines ruhenden Pions ist $T_0 = 2.5 \cdot 10^{-8}$ s.

Wir betrachten jetzt einen Strahl von Pionen, der sich mit der Geschwindigkeit

$$v_\pi = 2.9 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} = 0.99 \cdot c$$

bewegt, bezüglich des Laborsystems. Bezüglich dieses Bezugssystems beträgt die Halbwertszeit

$$T_{\text{Lab}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (0.99)^2}} = 7.09 T_0 = 17.8 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

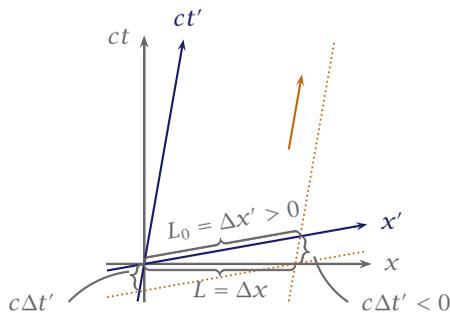
Die Flugdistanz nach der die Hälfte der Pionen eines Strahls zerfallen sind: $d_{\text{Lab}} = v_\pi \cdot T_{\text{Lab}} = 52.6 \text{ m}$.

Ohne die Zeitdilatation würde man eine Flugstrecke von $d = v_\pi \cdot T_0 = 7.43 \text{ m}$ prognostizieren.

Die Zeitdilatation ist experimentell messbar. Umgekehrt kann man die aus der Lorentztransformation folgende Form der Zeitdilatation dann benutzen, um aus der gemessenen Zeitdilatation die Größe der Grenzgeschwindigkeit v_0 experimentell zu bestimmen. \blacktriangleleft

Längenkontraktion Ein Stab ruht entlang x' in Σ' und hat in Σ' die Länge L_0 .

Bemerkung: Der Begriff *Länge* bzw. *räumlicher Abstand* ist nur für gleichzeitige Ereignisse sinnvoll, für die sich der Raum-Zeit-Abstand $\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2$ auf Δx^2 reduziert. \rightarrow



► 105 Längenkontraktion

Mit der Lorentztransformation

$$\begin{aligned}\Delta t &= \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) \Rightarrow c \Delta t' = -\frac{v}{c} L_0 \\ L = \Delta x &= \gamma (\Delta x' + v \Delta t') = \gamma \left(L_0 - \frac{v^2}{c^2} L_0 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) L_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 = \frac{L_0}{\gamma}\end{aligned}$$

Folglich

$$\boxed{L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 < L_0} \quad (3.6)$$

Alternative kann man auch wieder die Minkowski-Abstände betrachten.

1.)

$$\begin{aligned}\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 &= (\Delta x')^2 - c^2 (\Delta t')^2 \\ L^2 &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) L_0^2 \Rightarrow (3.7)\end{aligned}$$

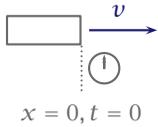
2.)

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t) \Rightarrow L_0 = \gamma L \quad (3.7)$$

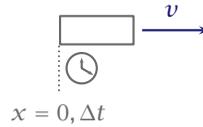
3.) Die Geschwindigkeit des Stabes bzgl. Σ ist bekannt. Also $L = v \Delta t$. (Abbildung 106)

Unsere Transformationsvorschrift lautet

$$\begin{aligned}x &= \gamma (x' + v t') \\ x' &= \gamma (x - v t) \\ t &= \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)\end{aligned}$$

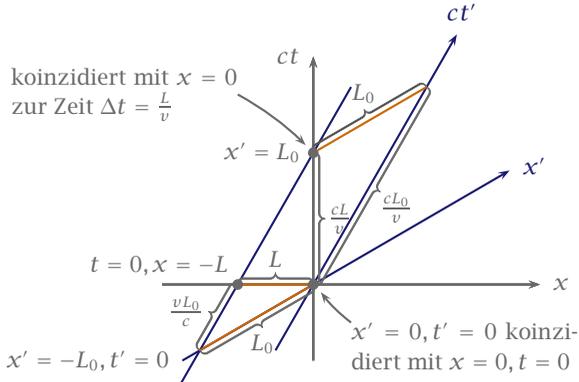


Stabanfang passiert $x = 0$ in Σ zur Zeit $t = 0$.



Stabende passiert $x = 0$ in Σ zur Zeit Δt .

► 106 Längenkontraktion eines Stabes.



► 107 Charakteristische Größen zur Längenkontraktion.

Die Länge L ist dadurch definiert, dass zur Zeit $t = L/v$ der Punkt $x' = -L_0$ die Position $x = 0$ passiert.

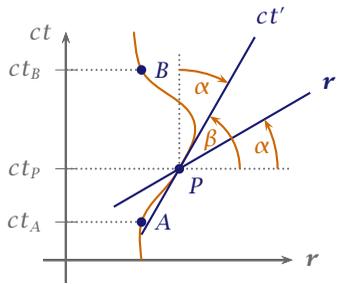
$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ \Rightarrow -L_0 &= \gamma\left(-v - \frac{L}{v}\right) \\ \Rightarrow L_0 &= \gamma L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(t = \frac{L}{v}, x = 0\right) &\Leftrightarrow \left(t' = \gamma\left(\frac{L}{v} - 0\right) = \frac{L_0}{v}, x' = \gamma\left(0 - v\frac{L}{v}\right) = -L_0\right) \\ \left(t = 0, x = -L\right) &\Leftrightarrow \left(t' = \gamma\left(0 - \frac{v}{c^2}(-L)\right) = \frac{v}{c^2}\gamma L = \frac{v}{c^2}L_0, x' = \gamma(-L - 0) = -L_0\right) \end{aligned}$$

Fazit: Bewegte Maßstäbe sind verkürzt. →

Bemerkung: Zeitdilatation und Längenkontraktion sind reziproke Relationen zwischen zwei relativ zueinander bewegten gleichen Uhren bzw. Maßstäben.

Volumenkontraktion: $\Delta V = L_x L_y L_z = \frac{1}{\gamma} L_{0x} L_{0y} L_{0z} = \frac{1}{\gamma} \Delta V_0$ →



► 108 Die Eigenzeit eines Teilchens am Punkt P .

Eigenzeit

$$\tan \beta = \frac{d(ct)}{dx(t)}$$

$$\tan \alpha = \tan(90^\circ - \beta) = \frac{dx(t)}{d(ct)} = \frac{v(t)}{c}$$

α entspricht also der Neigung der lokalen r' -Achse.

Die Geschwindigkeit des Teilchens in P ist

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

Die Tangente an die Weltlinie im Punkt P entspricht der ct' -Achse desjenigen Bezugssystems Σ' , das sich bzgl. Σ mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ bewegt, d.h. in welchem der Punkt P zur Zeit t ruht.

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d\mathbf{v}(t))^2 - c^2(dt)^2 = \left(\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - c^2 \right) dt^2 \\ &= (\mathbf{v}(t)^2 - c^2) dt^2 = (d\mathbf{r}''(t''))^2 - c^2(dt'')^2 \\ &= (\mathbf{v}''(t'') - c^2)(dt'')^2 \end{aligned}$$

$\mathbf{v}''(t'')$ ist die Geschwindigkeit des Teilchens relativ zu Σ'' .

Speziell $\Sigma'' = \Sigma'$ sodass $\mathbf{v}''(t_2) = 0$, d.h. die obige Wahl ist das momentane Bezugssystem. Dann gilt

$$ds^2 = (\mathbf{v}(t)^2 - c^2) dt^2 = -c^2 dt'^2 = -c^2 d\tau^2$$

t' hängt von $\mathbf{v}(t)$ ab und damit von t .

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{-c^2}$$

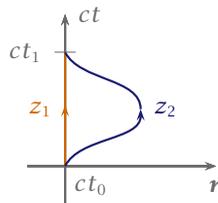
$$\begin{aligned} d\tau(t) &= \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \\ &= \sqrt{1 - \frac{v'(t')^2}{c^2}} dt' = dt' \end{aligned}$$

$d\tau(t)$ ist das Zeitdifferential einer mit dem Teilchen mitbewegten Uhr.

$$\underbrace{\int_{t_A}^{t_B} \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}_{\leq 1} dt}_{\leq t_B - t_A} = \tau_B - \tau_A$$

$$\rightsquigarrow \tau_B - \tau_A < t_B - t_A$$

$\tau_B - \tau_A$ ist die Zeit, die zwischen A und B für einen mitbewegten Beobachter versteht. Dies entspricht einer Zeitdilatation. Dies kann wieder beobachtet werden bei der Zerfallszeit T_0 ruhender Pionen. Die Zerfallszeit in der Eigenzeit der in der kosmischen Höhenstrahlungen einfallenden Pionen ist größer als T_{Lab} .



► 109 Zwillingsparadoxon

In Abbildung 109 ist das Zwillingsparadoxon dargestellt. Das Alter verändert sich wie folgt

$$z_1 = t_1 - t_0$$

$$z_2 = \tau_1 - \tau_0 < t_1 - t_0$$

Der bewegte Zwilling bleibt scheinbar jünger als der ruhende Zwilling.

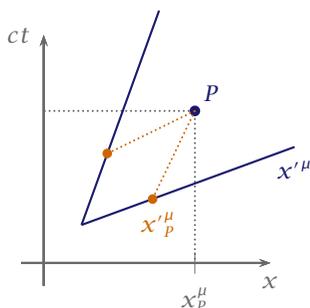
Bemerkung: Das Relativitätsprinzip scheint verletzt, aber das Ruhesystem von z_2 ist kein Inertialsystem. Folglich ist $z_1 \leftrightarrow z_2$ keine Lorentztransformation. z_2 wird beschleunigt und damit gegenüber z_1 ausgezeichnet. \rightarrow

3.4 Vierervektoren

Im Euklidischen Raum erlaubt das Vektorkalkül physikalische Gesetze manifest basisunabhängig zu formulieren. Das Relativitätsprinzip legt nahe, eine analoge basisunabhängige Vektorschreibweise für die 4-dimensionale Raumzeit einzuführen.

$$x^\mu = (ct, \underbrace{x, y, z}_r) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i)$$

Griechische Indizes laufen von 0 ab, lateinische Indizes von 1.



► 110 Der skalare Fall $\phi(x^\mu)$

Poincaré-Transformation

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

Zunächst betrachten wir den Tensor Λ^μ_ν , der beliebig ist, bis auf die Eigenschaft $\det(\Lambda^\mu_\nu) \neq 0$.

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$$

Die spezielle Relativitätstheorie behandelt nur Fälle, in denen die Einträge Λ^μ_ν und die a^μ konstant sind.

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu = \bar{\Lambda}^\mu_\nu dx'^\nu$$

Die Λ erfüllen folgende Eigenschaft

$$\Lambda^\kappa_\mu \bar{\Lambda}^\mu_\lambda = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x'^\lambda} = \delta^\kappa_\lambda = \begin{cases} 1 & \kappa = \lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \bar{\Lambda}^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

Tensoren im affinen Raum

Skalar $\phi(x^\mu)$

$$\phi(x^\mu_p) \rightarrow \phi'(x'^\mu_p)$$

$$\phi(x'^\mu_p(x^\nu_p)) = \phi(x^\nu_p)$$

kontravarianter Vektor $\mathbb{V}^1 \rightarrow A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$$

A^μ transformiert sich wie dx^ν .

kovarianter Vektor $\mathbb{V}_1 \rightarrow A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \bar{\Lambda}^\nu_\mu A_\nu$$

A_μ transformiert sich wie dx'^ν

► **Beispiel** Gradient eines skalaren Feldes:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi(x^\nu) &\rightarrow \partial'_\mu \phi'(x'^\nu) = \partial'_\mu \phi(x^\kappa(x'^\lambda)) \\ &= \partial_\nu \phi(x^\kappa) \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \bar{\Lambda}^\nu_\mu \partial_\nu \phi \end{aligned}$$



Betrachte:

$$\begin{aligned} A^\mu B_\mu &\rightarrow A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu_\nu \bar{\Lambda}^\lambda_\mu A^\nu B_\lambda \\ &= \underbrace{\bar{\Lambda}^\lambda_\mu \Lambda^\mu_\nu}_{\delta^\lambda_\nu} A^\nu B_\lambda \\ &= A^\lambda B_\lambda \end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass dies ein invarianter Skalar ist.

Denn:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}^\lambda_\mu \Lambda^\mu_\nu &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \\ &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\nu} \\ &= \delta^\lambda_\nu \end{aligned}$$

Bemerkung: Auf der Stufe eines affinen Raumes gibt es keinen »natürlichen« Isomorphismus zwischen \mathbb{V}^1 und \mathbb{V}_1 . Dies wird erst durch die Metrik geliefert. \rightarrow

Tensor $\mathcal{T}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{\beta_1, \dots, \beta_n} \in \mathbb{V}^m_n$

► **Beispiel**

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta}_y \rightarrow \boxed{\mathcal{T}'^{\alpha\beta}_y = \Lambda^\alpha_\kappa \Lambda^\beta_\lambda \bar{\Lambda}^\mu_\gamma \mathcal{T}^{\kappa\lambda}_\mu}$$

Transformiert sich wie $dx^\alpha dx^\beta \partial_\gamma$.



Bemerkung: Gleiches Symbol für den Tensor und seine Komponenten. \rightarrow

► **Beispiel** Die Spur eines Tensors:

$$\mathcal{T}'^\mu_\mu = \underbrace{\Lambda^\mu_\kappa \bar{\Lambda}^\nu_\mu}_{\delta^\nu_\kappa} \mathcal{T}^\kappa_\nu = \mathcal{T}^\kappa_\kappa$$



Die zusätzliche Struktur der Metrik macht einen affinen Raum zum metrischen Raum.

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

$$\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

ds^2 soll invariant sein, also

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds'^2 \\ &= g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \\ &= g'_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ \Rightarrow g_{\mu\nu} &= g'_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}^\mu_\lambda \bar{\Lambda}^\mu_\kappa g'_{\mu\nu} &= g'_{\alpha\beta} \underbrace{\Lambda^\alpha_\mu \bar{\Lambda}^\mu_\lambda}_{\delta^{\alpha\lambda}} \underbrace{\Lambda^\beta_\nu \bar{\Lambda}^\nu_\kappa}_{\delta^{\beta\kappa}} \\ \Rightarrow g'_{\lambda\kappa} &= \bar{\Lambda}^\mu_\lambda \bar{\Lambda}^\nu_\kappa \end{aligned}$$

$g_{\mu\nu}$ ist ein $(0, 2)$ -Tensor (metrischer Tensor). Eine Metrik benötigt ein Skalarprodukt. Seien dazu $A^\mu, B^\nu \in \mathbb{V}^1$

$$(A, B) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g'_{\kappa\lambda} A'^\kappa B'^\lambda = (A', B')$$

Denn:

$$\begin{aligned} g'_{\kappa\lambda} A'^\kappa B'^\lambda &= \bar{\Lambda}^\mu_\lambda \bar{\Lambda}^\nu_\kappa \Lambda^\kappa_\epsilon \Lambda^\lambda_\delta g_{\mu\nu} A^\epsilon B^\delta \\ &= g_{\mu\nu} A^\nu B^\mu \\ &\stackrel{!}{=} g_{\nu\mu} A^\nu B^\mu \end{aligned}$$

Die Metrik vermittelt einen basisunabhängigen Isomorphismus zwischen \mathbb{V}^1 und \mathbb{V}_1 .

$$\boxed{A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu}$$

$$\Rightarrow (A, B) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\nu B^\nu = A^\mu B_\mu$$

Damit die Metrik einen Isomorphismus vermittelt, muss gelten:

$$A^\nu = (g_{\mu\nu})^{-1} A_\mu$$

wobei $(g_{\mu\nu})^{-1}$ die Umkehrabbildung ist. Definiere dazu

$$\boxed{g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} = \delta^\mu_\nu}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} A_\mu &= g_{\mu\nu} A^\nu \\ \rightsquigarrow g^{\kappa\mu} A_\mu &= g^{\kappa\mu} g_{\mu\nu} A^\nu = \delta^\kappa_\nu A^\nu = A^\kappa \end{aligned}$$

$$\boxed{A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu}$$

Behauptung $g^{\mu\nu}$ ist ein $(2, 0)$ Tensor, d.h. es muss gelten

$$g'^{\mu\alpha} = \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\alpha{}_\lambda g^{\kappa\lambda} g'^{\mu\alpha} g'_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu \quad \times$$

BEWEIS

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\lambda \bar{\Lambda}^\beta{}_\alpha \bar{\Lambda}^\gamma{}_\nu g^{\kappa\lambda} g_{\beta\gamma} = \Lambda^\mu{}_\kappa \bar{\Lambda}^\gamma{}_\nu g^{\kappa\lambda} g_{\lambda\gamma} = \Lambda^\mu{}_\gamma \bar{\Lambda}^\gamma{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Bisher wurde von keiner speziellen Raumdimension Gebrauch gemacht.

Spezialfall: $(\mathbb{R}^3, \text{euklidische Metrik}) \mathbb{E}^3$.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

Die 4-dimensionale »Raum-Zeit« der speziellen Relativitätstheorie ist durch die lorentzinvariante, indefinite Minkowski-Metrik (4-Metrik) charakterisiert.

$$(\mathcal{g}_{\text{RZ}})_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Postulat des invarianten Lichtkegels: Raum-Zeit Intervall $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ist lorentzinvariant, d.h.

$$\Lambda^\alpha{}_\beta, \bar{\Lambda}^\alpha{}_\beta \text{ sind lorentzinvariant} \iff \eta_{\alpha\beta} = \eta'_{\alpha\beta}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta'_{\alpha\beta} \iff \eta_{\alpha\beta} = \bar{\Lambda}^\mu{}_\alpha \bar{\Lambda}^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu}$$

$$\Lambda^\alpha{}_\kappa \Lambda^\beta{}_\lambda \eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\kappa \Lambda^\beta{}_\lambda \bar{\Lambda}^\mu{}_\alpha \bar{\Lambda}^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\kappa\lambda}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu}$$

In der Standardkonfiguration

$$x'^0 = \gamma \left(x^0 - \frac{v}{c} x^1 \right), x'^1 = \gamma \left(x^1 - \frac{v}{c} x^0 \right), x'^2 = x^2, x'^3 = x^3, \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

und mit

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}, \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda^\nu{}_\mu$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 \eta_{\alpha\beta} &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = \Lambda^\alpha{}_\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\gamma^2 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} & \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} & 0 & 0 \\ \gamma^2 \frac{v}{c} - \gamma^2 \frac{v}{c} & -\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} + \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Folgerungen: $\blacktriangleright A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) \iff A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = (-A^0, \mathbf{A})$

$\blacktriangleright A^\mu A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = -(A^0)^2 + \mathbf{A}^2$

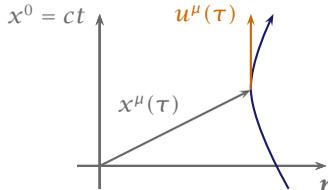
$\blacktriangleright A^i = A_i, i = 1, 2, 3$

$\blacktriangleright \eta^{\alpha\beta} \eta_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma$

$$\Rightarrow \eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-

3.5 Relativistische Mechanik



\blacktriangleright 111 Die Tangente an der Weltlinie ist die Geschwindigkeit.

Kurvenparameter der Weltlinie x^μ : Eigenzeit τ , die wegen

$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2}$$

eine Lorentzinvariante und damit ein Skalar ist.

Der Tangentialvektor an der Weltlinie ist

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Dies gibt den Anlass zur Einführung der 4-Geschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(\tau)}} \frac{dx^\mu(t)}{dt} \Big|_{t=t(\tau)}$$

Bemerkung: ▶ $\beta^2 = \left(\frac{v(\tau)}{c}\right)^2$

▶ u^μ ist ein 4-Vektor, da dx^μ ein 4-Vektor und $d\tau$ ein Skalar.

▶ $x^\mu(t) = (xt, \mathbf{r}(t)), \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$

$$\Rightarrow u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(\tau)}} \left(ct, \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

wobei $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\tau) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \Big|_{t=t(\tau)}$

▶ 3-Teil des 4-Vektors $u^\mu = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, d.h. $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ ist nicht 3-Teil eines 4-Vektors

▶ $u^\mu u_\mu = -\frac{c^2}{1-v^2/c^2} + \frac{v^2}{1-v^2/c^2} = -\frac{c^2}{1-v^2/c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -c^2$, zeitartig. →

2 Wege zur relativistischen Mechanik

1.) lorentzkovariante Verallgemeinerung der Newtonschen Mechanik, die sich im Limes $v/c \ll 1$ aus der relativistischen Mechanik ergibt.

2.) Invariantes Wirkungsprinzip: $L(v^2) dt = L(v'^2) dt'$ für Lorentztransformation.

Weg 2: Lagrangefunktion eines freien, relativistischen Teilchens:

$$L(v^2) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad m: \text{invariante Ruhemasse}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen führen auf

$$\frac{d}{dt} \left[-mc^2 \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] = 0$$

$$L(v) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= -mc^2 \frac{-\frac{2\dot{q}}{c^2}}{2\sqrt{1-\frac{\dot{q}^2}{c^2}}} = \frac{m\dot{q}}{\sqrt{1-\frac{\dot{q}^2}{c^2}}} = p \\ p^2 &= \frac{m^2 \dot{q}^2}{1-\frac{\dot{q}^2}{c^2}} \\ m^2 \dot{q}^2 &= p^2 - \frac{p^2 \dot{q}^2}{c^2} \Rightarrow \dot{q}^2 \left\{ m^2 + \frac{p^2}{c^2} \right\} = p^2 \Rightarrow \dot{q}^2 = \frac{p^2}{m^2 + p^2/c^2} \\ \dot{q} &= \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}} \\ H(p) &= p\dot{q}(p)L(\dot{q}(p)) = p \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}} \\ \sqrt{1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}} &= \sqrt{1 - \frac{p^2/c^2}{m^2 + p^2/c^2}} = \sqrt{\frac{m^2 + p^2/c^2 - p^2/c^2}{m^2 + p^2/c^2}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}} \\ \Rightarrow H(p) &= \frac{p^2}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}} + \frac{m^2 c^2}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}} \\ &= \frac{p^2 + m^2 c^2}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}} \\ &= \frac{c^2 (m^2 + p^2/c^2)}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}} \\ &= c^2 \sqrt{m^2 + p^2/c^2} \\ \boxed{H(p) &= c\sqrt{m^2 c^2 + p^2}} \end{aligned}$$

Nichtrelativistischer Grenzfall:

$$\begin{aligned} H(p \rightarrow 0) &= m^2 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \\ &\rightsquigarrow mc^2 \left\{ 1 + \frac{p^2}{2m^2 c^2} + \dots \right\} \\ &\rightsquigarrow mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots \end{aligned}$$

Weg 1: Trajektorie für ein kräftefreies Teilchen. Nach Newton gilt

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = 0$$

d.h. $m\mathbf{v} = \mathbf{p} = \text{const.}$

Nach Einstein:

$$p^\mu = mu^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

ist ein 4-Vektor mit $\partial_\tau p^\mu = 0$.

Bewegungsgesetz nach Newton

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{mv}) = \mathbf{F} \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

und nach Einstein

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} = K^\mu = (K^0, \mathbf{K})$$

manifest lorentzkovariant wenn K^μ ein 4-Vektor ist.

3-Teil:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \mathbf{K} \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \mathbf{K} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathbf{K} = \mathbf{F} \end{aligned}$$

wobei $m/\sqrt{1-\beta^2}$ die dynamische Masse ist.

Bemerkung: \mathbf{F} ist im Gegensatz zu \mathbf{K} nicht der 3-Teil von einer 4-Kraft (Analog wie \mathbf{v} nicht 3-Teil von u^μ ist). →

o-Teil:

$$\begin{aligned} u^\mu u_\mu &= -c^2 \\ \rightsquigarrow 0 &= \frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu + u^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} = 2 \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu \\ \Rightarrow \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu &= 0 \\ \rightsquigarrow \frac{du^\mu}{d\tau} &= K^\mu \rightsquigarrow m \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu = K^\mu u_\mu = 0 \\ \Rightarrow K^0 u_0 + K^i u_i &= 0 \Rightarrow -K^0 u^0 + \mathbf{K} \mathbf{u} = 0 \\ \rightsquigarrow K^0 &= \frac{\mathbf{K} \mathbf{u}}{u^0} = \frac{1}{c/\sqrt{1-\beta^2}} \left[\frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ K^0 &= \frac{dp^0}{d\tau} = m \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

klassisch:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Damit folgt

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \text{const}}$$

$$p^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \text{ mit } \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \text{ und } E = \gamma mc^2, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Index

— Sonstige —

1. Kirchhoffsche Regel, 17

— A —

Additionstheorem der Geschwindigkeiten,
114

Ätherhypothese, 110

Ausstrahlungsbedingung, 103

— C —

CGS-System, 3

Coulomb-Gesetz, 3

Coulombbeichung, 49

— D —

Differentialoperator

Divergenz, 29

Gradient, 27

Rotation, 30

Dirichlet-Randbedingung, 66

Dispersionsgesetz, 82

Drehmoment eines Dipols, 65

— E —

Eichfreiheit, 32

Eichtransformation, 93

elektromagnetische Feldenergiegedichte, 38

Energiesatz der Feld-Teilchen Systeme, 38

Energiestromdichte, 38

— F —

Feldenergie, 38

Feldimpuls, 38

Fluss Φ , 8

— G —

Gaußscher Satz, 29

Gaußsches Gesetz, 11

Greensche Funktion, 48

avancierte, 101

retardierte, 100

Greenscher Satz, 76

— I —

Impulsdichte des elektromagnetischen Fel-
des, 42

Induktionsgesetz, 21

— K —

Keplerproblem, 7

Kontinuitätsgleichung

differentielle Form, 30

integrale Form, 14

Konvektionsstrom, 14

Kreuzprodukt, 5

— L —

Laplace-Gleichung, 46

Legendre-Polynome, 60

Lorentzkraft, 5

Lorentzkraftdichte, 22, 36

— M —

Maxwells Ergänzungsterm, 26

Maxwellsche Ergänzung, 23

Maxwellsche Gleichungen

differentielle Form, 36

integrale Form, 22

Maxwellscher Spannungstensor, 42

Multipolentwicklung, 53

elektrisches Feld, 53

magnetisches Feld, 53

— N —

Nabla-Operator, 28

Neumann-Randbedingung, 66

— O —

Ohmsche Gesetz, 40

— P —

Poisson-Gleichung, 47

Poyntingvektor, 38, 89

— R —

Randwertprobleme, 51

Relativität der Gleichzeitigkeit, 117

Relativitätsprinzip, 111

Residuensatz, 98

— S —

stationäre Ströme, 17

Stokesscher Satz, 31

Stromdichte \mathbf{j} , 13

Superpositionsprinzip, 5f.

— **T** —

transversale Wellen, 84

— **V** —

verallgemeinerte Biot-Savart Gesetz, 50

— **Z** —

Zyklotronfrequenz, 7

Literatur

- [1] H. Cartarius und H. Menke. *Mathematische Methoden der Physik*. Universität Stuttgart, 2012. URL: <http://itp1.uni-stuttgart.de/lehre/vorlesungen/?T=93>.
- [2] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Third. John Wiley & Sons, Inc., 1999. ISBN: 978-0-471-30932-1.
- [3] E. Rebhan. *Theoretische Physik: Elektrodynamik*. Spektrum Akademischer Verlag, 2007. ISBN: 978-3-827-41717-6.